高次方程式の解法

陳 謙

平成 16 年 5 月 25 日

1　２次方程式の解法

２次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

の解の公式は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

です。プログラムで解く時、次の様に計算したほうが便利

$$\begin{array}{ll} B & = -\frac{b}{2a} \\ C & = \frac{c}{a} \\ x & = B \pm \sqrt{B^2 - C} \end{array} \tag{3}$$

2　３次方程式の解法

３次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{4}$$

を解くために、まず、式 4 の両辺を a で割って、３次項の係数を１にします.

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{5}$$

ここで、

$$\left\{ \begin{array}{ll} A & = \frac{b}{a} \\ B & = \frac{c}{a} \\ C & = \frac{d}{a} \end{array} \right.$$

次に、

$$x = y - \frac{A}{3} \tag{6}$$

を式 5 に代入して、２次項を消し、方程式を次のように変形します。

$$y^3 + py + q = 0 \tag{7}$$

ここで、

$$\left\{ \begin{array}{ll} y & = x + \frac{A}{3} \\ p & = B - \frac{A^2}{3} \\ q & = \frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} + C \end{array} \right. .$$

式 7 の解は、

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1 & = m + n \\ y_2 & = mw + nw^2 \\ y_3 & = mw^2 + nw \end{array} \right.$$

です。ここで、

$$\left\{ \begin{array}{ll} m & = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ n & = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ w & = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{array} \right. .$$

従って、方程式 4 の解は、

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = m + n - \frac{A}{3} \\ y_2 & = mw + nw^2 - \frac{A}{3} \\ y_3 & = mw^2 + nw - \frac{A}{3} \end{array} \right.$$

です。

3　４次方程式の解法

４次方程式

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \tag{8}$$

を解くために、まず、式 8 の両辺を a_4 で割って、4次項の係数を 1 にします.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{9}$$

ここで、

$$\begin{cases} a &= \frac{a_3}{a_4} \\ b &= \frac{a_2}{a_4} \\ c &= \frac{a_1}{a_4} \\ d &= \frac{a_0}{a_4} \end{cases}$$

次に、

$$x = y - \frac{a}{4} \tag{10}$$

を式 9 に代入して、3 次項を消します。

$$y^4 + Ay^2 + By + C = 0 \tag{11}$$

ここで、

$$\begin{cases} x &= y - \frac{a}{4} \\ A &= b - \frac{3a^2}{8} \\ B &= c + \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} \\ C &= d - \frac{3a^4}{256} + \frac{a^2 b}{16} - \frac{ac}{4} \end{cases}.$$

式 11 を次の様に変形します。

$$\begin{aligned} & y^4 + Ay^2 + By + C &= \\ & y^4 + 2\lambda y^2 + \lambda^2 - 2\lambda y^2 - \lambda^2 + Ay^2 + By + C &= \\ & (y^2 + \lambda)^2 + (A - 2\lambda)y^2 + By + C - \lambda^2 &= \\ & (y^2 + \lambda)^2 + (A - 2\lambda)\left(y + \frac{B}{2(A-2\lambda)}\right)^2 - \frac{B^2}{4(A-2\lambda)} + C - \lambda^2 &= 0 \end{aligned}. \tag{12}$$

上記の式を簡単にするために、

$$-\frac{B^2}{4(A - 2\lambda)} + C - \lambda^2 = 0 \tag{13}$$

を満たす λ を求めます。式 13 を変形すると、下記の λ に関する 3 次方程式になります。

$$\lambda^3 - \frac{A}{2}\lambda^2 - C\lambda + \frac{AC}{2} - \frac{B^2}{8} = 0 \tag{14}$$

方程式 14 を解いて、その解を式 12 に代入すると、下記の様に変形できます。

$$\left(y^2 + \lambda\right)^2 + M(y + N)^2 = 0, \tag{15}$$

ここで、

$$\begin{cases} M &= A - 2\lambda \\ N &= \frac{B}{A-2\lambda} \end{cases}.$$

式 15 は二つの 2 次方程式に分解することができます。

$$\begin{aligned} y^2 + \sqrt{-M}y + \lambda + \sqrt{-M} &= 0 \\ y^2 - \sqrt{-M}y + \lambda - \sqrt{-M} &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

それぞれを解くことによって、4 次方程式の解が求まります。