

平面 d 次曲線の写像類群とその上の Meyer 函数

久野 雄介

第 34 回変換群論シンポジウム

概要

2以上の自然数 d に対して, 平面 d 次曲線の写像類群を定義し, この群の上に Meyer 函数が一意的に存在することを証明する. $d = 4$ の場合には, この Meyer 函数を用いて, 一般ファイバーが種数 3 の非超楕円的な Riemann 面になっている様な 4 次元ファイバー空間に対して局所符号数を定義することができる. いくつかの具体例に対し局所符号数を計算する.

はじめに.

Σ_g で種数 $g \geq 0$ の C^∞ 級で向き付けられた閉曲面, Γ_g で Σ_g の写像類群, すなわち Σ_g の向きを保つ微分同相写像のアイソトピー類全体のなす群を表す.

[13] において, W.Meyer は 2-コサイクル $\tau_g: \Gamma_g \times \Gamma_g \rightarrow \mathbb{Z}$ を発見した. 今日ではこのコサイクルは Meyer の符号数コサイクルと呼ばれている. この論文において W.Meyer はコホモロジー類 $[\tau_g] \in H^2(\Gamma_g; \mathbb{Z})$ が $g = 1, 2$ のとき捩れ元であり, $g \geq 3$ のとき無限位数であることを示した. 更に, τ_1 をコバウンドする Γ_1 上の一意的な \mathbb{Q} 値 1-コチェイン ϕ^1 を Rademacher 函数を用いて具体的に書き下している ([13] p.259 Satz 4). また, Γ_g の部分群である, 超楕円的写像類群 Γ_g^H が, \mathbb{Q} -輪状であることが F.Cohen[5] と N.Kawazumi[9] によって独立に証明された. 以来, τ_g を Γ_g^H に制限したものをコバウンドする Γ_g^H 上の 1-コチェインが一意的に存在することは知られていた. その様な 1-コチェイン $\phi_g^H: \Gamma_g^H \rightarrow \frac{1}{2g+1}\mathbb{Z}$ の存在と一意性を J.Birman-H.Hilden[3] による Γ_g^H の有限表示を使って直接証明したのが H.Endo[7] である. 彼はまた, ϕ_g^H を使って超楕円的ファイブレーションに対する局所符号数を定義し, 超楕円的ファイブレーションの幾何を研究した. 例えば, 閉曲面上のその様なファイブレーションに対する符号数公式が導かれている. この公式の起源は種数 2 のファイブレーションが研究された Y.Matsumoto[12] Theorem 3.3 にある. ϕ_g^H の研究に関して, 他には T.Morifuji[14] がある.

上の ϕ^1 や ϕ_g^H の様な 1-コチェインは Meyer 函数と呼ばれる. G を群, $\rho: G \rightarrow \Gamma_g$ を準同型とする. 1-コチェイン $\phi: G \rightarrow \mathbb{Q}$ が 2-コサイクル $\rho^*\tau_g$ をコバウンドするとき, ϕ を $\rho^*\tau_g$ に関する Meyer 函数と呼ぶ. 今回の主題は, Meyer 函数の興味深い他の例: 平面曲線の写像類群上の Meyer 函数である.

$d \geq 2$ に対して群 $\Pi(d)$ と準同型 $\rho: \Pi(d) \rightarrow \Gamma_g$ を構成する. ここで, $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. 群 $\Pi(d)$ は非特異 d 次平面曲線の連続族のアイソトピー類の分類空間の基本群と見做すことができる (詳しくは, 定理 6.1 参照).

本稿の主結果は定理 4.1 と定理 4.2 である. これらの帰結として, 引き戻し $\rho^*[\tau_g]$ が有理係数コホモロジー $H^2(\Pi(d); \mathbb{Q})$ においては消え, 1-コチェイン $\phi^d: \Pi(d) \rightarrow \mathbb{Q}$ で $\rho^*\tau_g$ をコバ

ウンドするものが一意的に存在することが分かる. ϕ^d を平面 d 次曲線の Meyer 函数と呼ぶことにする.

この状況は, Γ_1, Γ_2 , そして Γ_g^H のときと似ているが, 注意したいのは ρ は一般に単射でも全射でもないということである. 実際, $d = 4$ のときは命題 6.2 で見ると, ρ は全射ではあるが非自明な核を持つことが分かる. この意味で, 本稿の内容は Γ_g の部分群が研究されていた W.Meyer や H.Endo の仕事とは異なる.

$[\tau_g]$ の消滅を示すために W.Meyer や H.Endo がとった方法は写像類群の関係子上で符号数コサイクルのある具体的な計算を行うことであった. 我々の方法は, $[\tau_g]$ がとある群のコホモロジーに引き戻したときに消えることを示した命題 3.1 に基づく. この群はあるアフィン超曲面の補空間の基本群として定義され, 命題の証明はこの群の上に符号数コサイクルをコバウンドする 1-コチェインを具体的に構成することで行う. この方法はコサイクルの具体的な計算を必要としないので, $[\tau_g]$ が消える内在的な理由を示唆したり, あるいは将来他の場合にも応用できるのではないかと考えている.

さて $\rho^*[\tau_g] \in H^2(\Pi(d); \mathbb{Q})$ の消滅に関する研究は, 4 次元ファイバー空間の符号数の局所化と密接な関わりがある. これは近年トポロジー, 代数幾何, 複素解析など様々な分野から研究されている活発なトピックである (T.Ashikaga-H.Endo[1] や T.Ashikaga-K.Konno[2] を参照).

本稿では $d = 4$ のときの応用として, 一般ファイバーが種数 3 非超楕円的な Riemann 面になっているような 4 次元ファイバー空間のファイバー芽に対して, $\Pi(4)$ 上の Meyer 函数 ϕ^4 を用いて局所符号数を定義する. 種数 3 の非超楕円的 Riemann 面は標準埋め込みにより \mathbb{P}^2 内の非特異 4 次曲線として実現できる, ということが大切なポイントである.

種数 3 非超楕円的な族に対しては, T.Ashikaga-K.Konno[2] と K.Yoshikawa[16] において既に局所符号数が独立に定義されている. [2] の定義は代数幾何的であり, [16] の定義は複素解析的である. 我々の局所符号数はトポロジカルに定義されたものであるが, いくつかの例について計算してみると [2] と [16] において計算された値と一致することが分かる.

1 定義

本稿を通して d を 2 以上の固定された整数とする. V^d で, 変数 x, y, z に関する複素係数 d 次斉次式全体のなす複素ベクトル空間を表し, $\mathbb{P}(d) = \mathbb{P}(V^d)$ を V^d の射影化とする. 次数 d の単項式全体のなす集合を $\{x^{\ell(k)}y^{m(k)}z^{n(k)}\}_{k=0}^N$ とする. ここで, $N = \frac{1}{2}(d+2)(d+1) - 1$. V^d の各元は一意的に

$$\Phi = \sum_{k=0}^N a_k x^{\ell(k)} y^{m(k)} z^{n(k)},$$

$a_k \in \mathbb{C}$, の形に書くことができる. 対応する $\mathbb{P}(d)$ の斉次座標を $[a_0 : a_1 : \cdots : a_N]$ と書く. $\mathbb{P}(d)$ の元 a は次数 d の代数曲線 $C_a \subset \mathbb{P}^2$ を定める. 我々はまた, $F \in V^d \setminus \{0\}$ によって定まる代数曲線を C_F と書く. $D \subset \mathbb{P}(d)$ を, C_a が特異曲線になるような a 全体からなる集合とする. D はディスクリミネントローカスと呼ばれ, 既約かつ余次元 1 の解析的部分集合であることが知られている.

$GL(3; \mathbb{C})$ の V^d への作用が

$$(A \cdot F)(x, y, z) = F((x, y, z) \cdot {}^t A^{-1}),$$

$A \in GL(3; \mathbb{C}), F \in V^d$ によって与えられる. ここで ${}^t A$ は行列 A の転置行列. この作用は $PGL(3)$ の $\mathbb{P}(d)$, D , そして $\mathbb{P}(d) \setminus D$ への作用を誘導する.

$EPGL(3) \rightarrow BPGL(3)$ を普遍 $PGL(3)$ 束とする. 我々は, 群 $\Pi(d)$ を Borel 構成 $(\mathbb{P}(d) \setminus D)_{PGL(3)} = EPGL(3) \times_{PGL(3)} (\mathbb{P}(d) \setminus D)$ の基本群として定義し, 平面 d 次曲線の写像類群と呼ぶ.

Φ を a_0, \dots, a_N と x, y, z に関する双斉次多項式と見ることによって定まる $\mathbb{P}(d) \times \mathbb{P}^2$ (resp. $(\mathbb{P}(d) \setminus D) \times \mathbb{P}^2$) 内の超曲面を $\bar{\mathcal{F}}$ (resp. \mathcal{F}) とする. すると第 1 成分への射影 $p: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{P}(d) \setminus D$ は $a \in \mathbb{P}(d) \setminus D$ 上のファイバーが C_a になっている様な非特異 d 次平面曲線の族である. $PGL(3)$ の $\mathbb{P}(d) \times \mathbb{P}^2$ への対角作用は \mathcal{F} を保ち, p は $PGL(3)$ 同変なので Riemann 面の連続族 $p_u: \mathcal{F}_{PGL(3)} \rightarrow (\mathbb{P}(d) \setminus D)_{PGL(3)}$ が得られる. 我々は, この族の位相的モロロミーを $\rho: \Pi(d) \rightarrow \Gamma_g$ と書くことにする. ここで $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. 非特異 d 次平面曲線の種数が $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ で与えられることに注意.

第 4 節において, 我々は有理コホモロジー類 $\rho^*[\tau_g] \in H^2(\Pi(d); \mathbb{Q})$ が消えることを証明し, $\Pi(d)$ のアーベル化を計算する. 第 6 節において, 空間 $(\mathbb{P}(d) \setminus D)_{PGL(3)}$ が非特異 d 次平面曲線の連続族のアイソトピー類の分類空間になっていることを証明する.

2 ディスクリミネントローカス

この節ではディスクリミネントローカス D について述べる. \mathcal{X} を $\mathbb{P}(d) \times \mathbb{P}^2$ 内の, 方程式

$$\Phi = \Phi_x = \Phi_y = \Phi_z = 0$$

で定まる解析的部分集合とする. ここで Φ_x は Φ の x に関する偏微分, など. \mathcal{X} は非特異である. また, $\pi: \mathcal{X} \rightarrow D \subset \mathbb{P}(d)$ を第一成分への射影とすると, $(a, p) \in \mathcal{X}$ が π の正則点となることと, p が C_a のノード特異点であることは, 同値になることが分かる. ここでノード特異点とは局所的に方程式 $X^2 + Y^2 = 0$ で与えられる特異点のことである.

E を D の特異点集合と, π の臨界値集合の合併とする. Sard の定理より, E は D の真部分解析的集合である.

補題 2.1. $a^0 \in D \setminus E$, $(a^0, [x_0: y_0: z_0]) \in \mathcal{X}$ とする. このとき a^0 において D に接する $\mathbb{P}(d)$ の超平面 T_{a^0} は

$$T_{a^0} = \left\{ [\xi_0: \xi_1: \dots: \xi_N] \in \mathbb{P}(d); \sum_{k=0}^N \xi_k x_0^{\ell(k)} y_0^{m(k)} z_0^{n(k)} = 0 \right\}$$

で与えられる. 更に, $[x_0: y_0: z_0]$ は C_{a^0} の唯一の特異点であり, その特異点の型はノードである. また, $d = 2$ の場合を除いて, C_{a^0} は既約.

射影空間 $\mathbb{P}(d)$ は V^d の複素直線全体のなす集合と見做せる. \tilde{D} (resp. \tilde{E}) を D (resp. E) に属する全ての直線の合併集合とする. V^d の座標 (a_0, \dots, a_N) において, $F \in \tilde{D} \setminus \tilde{E}$ での \tilde{D} の接空間は補題 2.1 より

$$T_F \tilde{D} = \left\{ \sum_{k=0}^N \xi_k \frac{\partial}{\partial a_k} ; \sum_{k=0}^N \xi_k x_0^{\ell(k)} y_0^{m(k)} z_0^{n(k)} = 0 \right\}$$

で与えられる. ここで $[x_0 : y_0 : z_0]$ は C_F の唯一の特異点.

さて $\mathbb{P}(d)$ 上の代数曲線族 $\bar{\mathcal{F}}$ と同様にして, $V^d \setminus \{0\}$ 上に構成した代数曲線族を $\tilde{\mathcal{F}}$ と書く. 上記接空間の記述を用いて次が示される:

補題 2.2. B を次元 $s \geq 2$ の C^∞ 級多様体, $j: B \rightarrow V^d$ を $j(B) \subset V^d \setminus \tilde{E}$ となり, なおかつ \tilde{D} に横断的な C^∞ 級写像とする. このとき, $\tilde{\mathcal{F}}$ の j による引き戻し $j^* \tilde{\mathcal{F}}$ は C^∞ 級多様体. もし B が複素多様体で j が正則ならば, $j^* \tilde{\mathcal{F}}$ は $B \times \mathbb{P}^2$ 内の複素超曲面として自然な複素構造を持つ.

3 1-コチェイン $c: \pi_1(V^d \setminus \tilde{D}) \rightarrow \mathbb{Z}$

$\chi_1: \pi_1(V^d \setminus \tilde{D}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}(d) \setminus D)$ を射影 $V^d \setminus \tilde{D} \rightarrow \mathbb{P}(d) \setminus D$ の誘導する準同型, $\chi_2: \pi_1(\mathbb{P}(d) \setminus D) \rightarrow \Pi(d)$ を包含写像 $\mathbb{P}(d) \setminus D \rightarrow (\mathbb{P}(d) \setminus D)_{PGL(3)}$, $a \mapsto [e_0, a]$ の誘導する準同型とする. ここで e_0 は $EPGL(3)$ の基点. $\chi := \chi_2 \circ \chi_1$, $\tilde{\rho} := \rho \circ \chi$ とおく. すると, $\tilde{\rho}: \pi_1(V^d \setminus \tilde{D}) \rightarrow \Gamma_g$ は $V^d \setminus \tilde{D}$ 上に自然に構成される非特異平面曲線族の位相的モノドロミーである.

この節では, ある 1-コチェイン $c: \pi_1(V^d \setminus \tilde{D}) \rightarrow \mathbb{Z}$ を構成し, $\delta c = \tilde{\rho}^* \tau_g$ を示す. ポイントは, \tilde{E} の V^d 内での複素余次元が 2 以上なので, $V^d \setminus \tilde{E}$ が 2-連結となることである. この節に現れる空間は基点つきであり, 写像は基点を保つもの考える.

$\ell: S^1 \rightarrow V^d \setminus \tilde{D}$ を C^∞ 級写像とする. $V^d \setminus \tilde{E}$ は単連結であるから, ℓ を C^∞ 級写像 $\tilde{\ell}: D^2 \rightarrow V^d \setminus \tilde{E}$ に拡張することができる. $\tilde{\ell}$ は \tilde{D} に横断的であると仮定することができる. 補題 2.2 により $\tilde{\ell}^* \tilde{\mathcal{F}}$ はコンパクトで境界を持つ C^∞ 級の 4 次元多様体であり, D^2 の向きとファイバーの向きから定まる自然な向きを持つ.

$$c([\ell]) := \text{Sign}(\tilde{\ell}^* \tilde{\mathcal{F}})$$

とおく. ここで $[\ell]$ は ℓ によって代表される $\pi_1(V^d \setminus \tilde{D})$ の元, 右辺は $\tilde{\ell}^* \tilde{\mathcal{F}}$ の符号数である.

命題 3.1. この c の定義は well defined であり, $\delta c = \tilde{\rho}^* \tau_g$ が成り立つ. つまり c は $\tilde{\rho}^* \tau_g$ をコバウンドする 1-コチェイン.

証明. 後半のみ示す. ℓ_0 と ℓ_1 を S^1 から $V^d \setminus \tilde{D}$ への C^∞ 級写像とする.

$$c([\ell_0]) + c([\ell_1]) - c([\ell_0][\ell_1]) = \tilde{\rho}^* \tau_g([\ell_0], [\ell_1]). \quad (1)$$

を示したい. P をパンツとする. これは S^2 から 3 つの互いに交わらない閉円板の内部を除いたものである. P の境界を 2 つ選び S_0^1, S_1^1 と書く. P はブーケ $S^1 \vee S^1$ とホモトピー同値であるから C^∞ 級写像 $L: P \rightarrow V^d \setminus \tilde{D}$ で L の S_0^1 (resp. S_1^1) への制限が ℓ_0 (resp. ℓ_1) と

丁度同じになるものが存在する. L の, P の境界の残りの 1 成分への制限は $\ell_0 \cdot \ell_1$ とホモトピックである. ℓ_i を $\tilde{\ell}_i$ に拡張し ($i = 0, 1$), $\ell_0 \cdot \ell_1$ を $\widetilde{\ell_0 \cdot \ell_1}$ に拡張することで L は C^∞ 級写像 $\tilde{L}: S^2 \rightarrow V^d \setminus \tilde{E}$ に拡張する. ここで, $V^d \setminus \tilde{E}$ は 2-連結であるから \tilde{L} は D^3 からの写像に拡張する. よって引き戻し $\tilde{L}^* \tilde{\mathcal{F}}$ はある多様体の境界になっていて, 符号数は 0 である. あとは \pm に気を付ければ, 符号数の Novikov 加法性から

$$0 = \text{Sign}(\tilde{L}^* \tilde{\mathcal{F}}) = \text{Sign}(\tilde{\ell}_0^* \tilde{\mathcal{F}}) + \text{Sign}(\tilde{\ell}_1^* \tilde{\mathcal{F}}) - \text{Sign}(\widetilde{\ell_0 \cdot \ell_1}^* \tilde{\mathcal{F}}) + \text{Sign}(L^* \tilde{\mathcal{F}})$$

を得る. 符号数コサイクルと c の定義に鑑みると, これは式 (1) そのものである. \square

4 主結果

本稿の主結果を述べる.

定理 4.1. $\rho^*[\tau_g] = 0 \in H^2(\Pi(d); \mathbb{Q})$.

定理 4.2. $\Pi(d)$ のアーベル化すなわち整数係数 1 次元ホモロジー群は次の様になる.

$$H_1(\Pi(d); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/3(d-1)^2\mathbb{Z} & d \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき,} \\ \mathbb{Z}/(d-1)^2\mathbb{Z} & d \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod{3} \text{ のとき.} \end{cases}$$

特に, $H^1(\Pi(d); \mathbb{Q}) = 0$ が成り立つ.

これらの定理からの帰結として, 1-コチェイン $\phi^d: \Pi(d) \rightarrow \mathbb{Q}$ で $\delta\phi^d = \rho^*\tau_g$ を満たすものが一意的に存在することが従う. 我々は, ϕ^d を平面 d 次曲線の Meyer 函数と呼ぶ.

これらの定理の証明について簡単に述べる. 命題 3.1 において $\tilde{\rho}^*[\tau_g] = 0 \in H^2(\pi_1(V^d \setminus \tilde{D}); \mathbb{Z})$ が示されていた. よって定理 4.1 は次から従う:

補題 4.3. 第 3 節で定義された χ によって誘導される準同型

$$\chi^*: H^2(\Pi(d); \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(\pi_1(V^d \setminus \tilde{D}); \mathbb{Q})$$

は単射.

次に定理 4.2 を見る. 次の二つの補題が必要となる:

補題 4.4. $a^0 \in \mathbb{P}(d) \setminus D$ とし, \mathbb{P} で a^0 を通る $\mathbb{P}(d)$ 内の射影直線全体の集合を表す. すると, ある空でない Zariski 開集合 $U \subset \mathbb{P}$ が存在して, U の各元は E と交わらず, D に横断的となる.

補題 4.5. a^0 と U を補題 4.4 の通りとする. $Q \in U$ に対して, 複素曲面 $M = \{(a, p) \in Q \times \mathbb{P}^2; p \in C_a\}$ の不変量は次で与えられる:

$$c_1^2(M) = -d^2 + 9, \quad c_2(M) = d^2 + 3, \quad \text{Sign}(M) = 1 - d^2.$$

a^0 と $Q \in U$ を補題 4.5 の通りとする. 上の二つの補題を用いて $\pi_1(\mathbb{P}(d) \setminus D)$ の 1 次元ホモロジー群を計算することができる:

命題 4.6. $H_1(\pi_1(\mathbb{P}(d) \setminus D); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/3(d-1)^2\mathbb{Z}$.

定理 4.2 の証明. $F_0 \in V^d \setminus \tilde{D}$ を基点とし, 写像 $V^d \setminus \tilde{D} \rightarrow \mathbb{P}(d) \setminus D$ による F_0 の像を a^0 とする. 二つの写像 $\lambda: GL(3; \mathbb{C}) \rightarrow V^d \setminus \tilde{D}, A \mapsto A \cdot F_0$ と $\bar{\lambda}: PGL(3) \rightarrow \mathbb{P}(d) \setminus D, \bar{A} \mapsto \bar{A} \cdot a^0$ を考える. 整係数群ホモロジーの完全列

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong H_1(\pi_1(PGL(3))) \xrightarrow{\bar{\lambda}_*} H_1(\pi_1(\mathbb{P}(d) \setminus D)) \cong \mathbb{Z}/3(d-1)^2\mathbb{Z} \xrightarrow{\chi_{2*}} H_1(\Pi(d)) \rightarrow 0$$

が得られる.

ここで, $\lambda_*: \mathbb{Z} \cong H_1(GL(3; \mathbb{C})) \rightarrow H_1(V^d \setminus \tilde{D}) \cong \mathbb{Z}$ を計算すると $\lambda_*(1) = \pm d(d-1)^2$ となることが分かるので, これより $\bar{\lambda}_*(1 \bmod 3) = \pm d(d-1)^2 \bmod 3(d-1)^2$ となる. これで定理 4.2 の証明が終わる. \square

5 Meyer 関数の値

命題 4.6 より, $H^1(\pi_1(\mathbb{P}(d) \setminus D); \mathbb{Q}) = 0$ が分かる. $\bar{\phi}^d := \phi^d \circ \chi_2$ は $(\rho \circ \chi_2)^* \tau_g = \delta \bar{\phi}^d$ を満たす $\pi_1(\mathbb{P}(d) \setminus D)$ 上の一意的な 1-コチェインである. この節では, なげなわと呼ばれる特別な $\pi_1(\mathbb{P}(d) \setminus D)$ の元における $\bar{\phi}^d$ の値を計算する.

まず最初になげなわとは何かを説明する. 一般に M を m 次元の連結複素多様体, N を M の既約超曲面とする. すると包含写像 $M \setminus N \hookrightarrow M$ は次の群の完全列を誘導する:

$$1 \rightarrow \langle \sigma \rangle \rightarrow \pi_1(M \setminus N) \rightarrow \pi_1(M) \rightarrow 1.$$

ここで, $\langle \sigma \rangle$ は以下で記述される, $\pi_1(M \setminus N)$ のある元 σ の正規閉包を表す. p を N の非特異点とし, (z_1, \dots, z_m) を p のまわりの M の局所座標系で N が $z_1 = 0$ で定義される様なものとする. 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, この座標系で

$$[0, 1] \rightarrow M \setminus N, t \mapsto (\varepsilon e^{2\pi\sqrt{-1}t}, 0, \dots, 0)$$

により定まる, $q = (\varepsilon, 0, \dots, 0)$ を基点とするループを考える. このループと, $M \setminus N$ の基点を結ぶ道をつなぐことで, $\pi_1(M \setminus N)$ の元 σ が得られる. N の既約性により, σ の共役類は p や局所座標系の取り方には依らない. この共役類に属する各元は, N に関するなげなわと呼ばれる.

$\pi_1(\mathbb{P}(d) \setminus D)$ に戻る. D は $\mathbb{P}(d)$ の既約超曲面である. $\sigma^d \in \pi_1(\mathbb{P}(d) \setminus D)$ を D に関するなげなわとする. $\bar{\phi}^d$ は類関数だから, σ^d の共役類上 $\bar{\phi}^d$ の値は一定である. 補題 4.4 に現れた代数曲線族 $M \rightarrow Q$ を用いて次が計算される:

命題 5.1. $d \geq 3$ のとき,

$$\bar{\phi}^d(\sigma^d) = -\frac{d+1}{3(d-1)}.$$

注 5.2. $d = 2$ のときは, $(\mathbb{P}(2) \setminus D)_{PGL(3)}$ は $BSO(3)$ とホモトピー同値であることが分かる. 特に $\Pi(2) \cong \pi_1(BSO_3) = 1$ である.

6 $(\mathbb{P}(d) \setminus D)_{PGL(3)}$ の普遍性

空間 $(\mathbb{P}(d) \setminus D)_{PGL(3)}$ の普遍性を述べ、後半では $d = 4$ の場合を詳しく考察する。特に、 $\rho: \Pi(d) \rightarrow \Gamma_3$ が全射であることを証明する。

まずいくつか定義を行う。 $\iota: X \rightarrow P$ を連続写像、 $h: P \rightarrow B$ を構造群が $PGL(3)$ である様な \mathbb{P}^2 束とする。我々は、次を満たす $\xi = (X, \iota, P, h, B)$ のことを非特異平面 d 次曲線族と呼ぶ:

1. $p := h \circ \iota: X \rightarrow B$ は種数 $g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ のコンパクト Riemann 面の連続族、
2. 各 $b \in B$ に対して、制限写像 $\iota|_{X_b}: X_b \rightarrow P_b$ は正則な埋め込み。ここで、 $X_b = p^{-1}(b)$, $P_b = h^{-1}(b)$.

各 $b \in B$ に対して像 $\iota(X_b) \subset P_b \cong \mathbb{P}^2$ は非特異平面 d 次曲線である。二つの非特異平面 d 次曲線族 $\xi_i = (X^i, \iota_i, P^i, h_i, B)$, $i = 0, 1$ は次を満たすとき、アイソトピックであると呼ぶことにする: $B \times [0, 1]$ 上の非特異平面 d 次曲線族 $\tilde{\xi} = (\tilde{X}, \tilde{\iota}, \tilde{P}, \tilde{h}, B \times [0, 1])$ で $i = 0, 1$ に対して $\tilde{\xi}$ の $B \times \{i\}$ への制限が ξ_i と同型になるものが存在する。

空間 B に対して記号 $\mathcal{PC}_d(B)$ で B 上の非特異平面 d 次曲線族のアイソトピー類全体の集合を表す。束の引き戻しによって、 $\mathcal{PC}_d(\bullet)$ は位相空間のホモトピー圏から集合の圏への反変関手となる。

さて包含写像 $\mathcal{F} \hookrightarrow (\mathbb{P}(d) \setminus D) \times \mathbb{P}^2$ と第一成分への射影 $(\mathbb{P}(d) \setminus D) \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}(d) \setminus D$ を考える。簡単のため、 $\mathbb{P}(d) \setminus D) \times \mathbb{P}^2$ のかわりに Y と書く。これらの写像は $PGL(3)$ 同変であるから

$$\iota_u: \mathcal{F}_{PGL(3)} \rightarrow Y_{PGL(3)}$$

および

$$h_u: Y_{PGL(3)} \rightarrow (\mathbb{P}(d) \setminus D)_{PGL(3)}$$

が得られる。写像 $p_u := h_u \circ \iota_u$ は第 1 節で定義されたものと同じであり、

$$\xi_u := (\mathcal{F}_{PGL(3)}, \iota_u, Y_{PGL(3)}, h_u, (\mathbb{P}(d) \setminus D)_{PGL(3)})$$

は非特異平面 d 次曲線族である。次の定理は $(\mathbb{P}(d) \setminus D)_{PGL(3)}$ が $\mathcal{PC}_d(\bullet)$ の分類空間であって ξ_u が普遍族であることを言っている。

定理 6.1. 任意の空間 B に対して自然変換

$$\eta: [B, (\mathbb{P}(d) \setminus D)_{PGL(3)}] \rightarrow \mathcal{PC}_d(B)$$

は同型。

$f: B \rightarrow (\mathbb{P}(d) \setminus D)_{PGL(3)}$ による ξ_u の引き戻しを $f^*\xi_u$ と書くことにする。 η の逆写像を θ と書き、 ξ に対し $\theta([\xi])$ の代表元を ξ の分類写像と呼ぶ。

$d = 4$ のときは \mathbb{P}^2 束を考える必要が無い。種数 3 の非超楕円的な Riemann 面 C は標準埋め込みによって非特異平面 4 次曲線として実現できることを思い出そう。つまり $H^0(C; K_C)$ を C 上の正則 1 型式の空間とすると標準写像

$$\iota_C: C \rightarrow \mathbb{P}(H^0(C; K_C)^\vee)$$

は埋め込みであり, なおかつ $H^0(C; K_C)$ の基底を選ぶことにより $\mathbb{P}(H^0(C; K_C)^\vee)$ を \mathbb{P}^2 と同一視するならば C の像は非特異平面 4 次曲線である. 像の定義方程式は $\mathbb{P}(4) \setminus D$ の元として一意に決まる.

$p: X \rightarrow B$ を種数 3 コンパクト Riemann 面の連続族とする. 各ファイバー $p^{-1}(b), b \in B$ が非超楕円的であるとき, これを種数 3 非超楕円族と呼ぶ. 二つの種数 3 非超楕円族 $p_i: X_i \rightarrow B$ ($i = 0, 1$) は次を満たすとき, アイストピックであると呼ぶことにする: $B \times [0, 1]$ 上の種数 3 非超楕円族で, $i = 0, 1$ に対してその $B \times \{i\}$ への制限が $p_i: X_i \rightarrow B$ と $B \cong B \times \{i\}$ 上の Riemann 面の連続族として同型になるものが存在する.

空間 B に対して $\mathcal{NH}_3(B)$ で B 上の種数 3 非超楕円族のアイソトピー類全体のなす集合を表す. すると忘却関手

$$PC_4(\bullet) \rightarrow \mathcal{NH}_3(\bullet) \quad (2)$$

は同型である. というのは, 与えられた種数 3 非超楕円族 $p: X \rightarrow B$ に対して $\Lambda_X := \bigcup_{b \in B} H^0(p^{-1}(b); K_b)$ とおき, $P' := \mathbb{P}(\Lambda_X^\vee)$ とおけば B 上のベクトル束に随伴する \mathbb{P}^2 束 $h': P' \rightarrow B$ を得, 各ファイバーの標準写像 $\iota_{X_b}, b \in B$ を集めて, $\iota: X \rightarrow P'$ を得る. こうして $\xi = (X, \iota, P', h', B) \in PC_4(\bullet)$ が得られ, これが (2) の逆対応を与えているからである.

$d = 4$ の場合の考察を続ける.

命題 6.2. 準同型 $\rho: \Pi(4) \rightarrow \Gamma_3$ は全射.

定理 4.1 により $\rho^*: H^2(\Gamma_3; \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(\Pi(4); \mathbb{Q})$ は単射では無いので, ρ の核が無限群であることが分かる.

命題 6.2 の証明. \mathcal{T}_3 で種数 3 のコンパクト Riemann 面の Teichmüller 空間, $H_3 \subset \mathcal{T}_3$ で超楕円的な Riemann 面のなす部分集合を表す. Borel 構成 $(\mathcal{T}_3 \setminus H_3)_{\Gamma_3}$ の上に自然に乗る種数 3 非超楕円族が普遍性を持つことが簡単に分かる. 特にこの空間の基本群は $\Pi(4)$ と同型である. $\mathcal{T}_3 \setminus H_3$ 束 $(\mathcal{T}_3 \setminus H_3)_{\Gamma_3} \rightarrow B\Gamma_3 = K(\Gamma_3, 1)$ のホモトピー完全列から完全列

$$\Pi(4) \cong \pi_1((\mathcal{T}_3 \setminus H_3)_{\Gamma_3}) \xrightarrow{\rho'} \pi_1(B\Gamma_3) = \Gamma_3 \rightarrow \pi_0(\mathcal{T}_3 \setminus H_3).$$

を得る. ρ' は $(\mathcal{T}_3 \setminus H_3)_{\Gamma_3}$ 上の種数 3 非超楕円族の位相的モノドロミーに他ならない. H_3 は \mathcal{T}_3 の中で複素余次元 1 だから, $\pi_0(\mathcal{T}_3 \setminus H_3)$ は 1 点である. 従って ρ' は全射で, ρ も全射. \square

7 種数 3 非超楕円的ファイブレーションの局所符号数

$d = 4$ のときを考える. Meyer 関数 ϕ^4 の応用として, 一般ファイバーが種数 3 非超楕円的 Riemann 面になっている様な 4 次元ファイバー空間のファイバー芽の集合に局所符号数を定義する. この局所符号数を用いて, 一般ファイバーが種数 3 非超楕円的 Riemann 面である様な 4 次元ファイバー空間のクラスに対して符号数公式を導く.

Δ を 2 次元の向き付けられた閉円板, p をその中心とする. 4 つ組 $\mathcal{F} = (E, \pi, \Delta, p)$ が次を満たすとき, 種数 3 非超楕円族のファイバー芽と呼ぶ:

1. E は 4 次元の C^∞ 級多様体で, $\pi: E \rightarrow \Delta$ は C^∞ 級写像,
2. π の $\Delta \setminus \{p\}$ への制限は第 6 節の意味で種数 3 非超楕円族.

E はコンパクトで自然な向きを持つのでその符号数 $\text{Sign}(E)$ が定義される. 二つのファイバー芽 (E, π, Δ, p) と (E', π', Δ', p') は次を満たすとき同値であると呼ぶ: p (resp. p') を中心とするより小さい閉円板 $\Delta_0 \subset \Delta$ (resp. $\Delta'_0 \subset \Delta'$) と向きを保つ微分同相 $\varphi: (\Delta_0, p) \rightarrow (\Delta'_0, p')$ および $\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(\Delta_0) \rightarrow \pi'^{-1}(\Delta'_0)$ が存在して $\varphi \circ \pi = \pi' \circ \tilde{\varphi}$ が成り立ち, かつ

$$\tilde{\varphi}|_{\pi^{-1}(\Delta_0 \setminus \{p\})}: \pi^{-1}(\Delta_0 \setminus \{p\}) \rightarrow \pi'^{-1}(\Delta'_0 \setminus \{p'\})$$

は各ファイバーを双正則にうつす.

\mathcal{NH}_3 でその様な 4 つ組の同値類全てのなす集合を表す. \mathcal{NH}_3 の元も $\mathcal{F} = (E, \pi, \Delta, p)$ と書く. $\mathcal{F} = (E, \pi, \Delta, p) \in \mathcal{NH}_3$ に対して, 境界 $\partial\Delta$ を反時計回りに 1 周する $\pi_1(\Delta \setminus \{p\})$ の元を γ で表し, \mathcal{F}^0 で $\pi: E \rightarrow \Delta$ の $\Delta \setminus \{p\}$ への制限を表す. \mathcal{F}^0 は種数 3 非超楕円族であり, (2) により $\mathcal{PC}_4(\Delta \setminus \{p\})$ の元と見做することができる.

定義 7.1. $\text{loc.sig}^{\mathcal{Q}}: \mathcal{NH}_3 \rightarrow \mathbb{Q}$ を

$$\text{loc.sig}^{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}) := \phi^4(\theta(\mathcal{F}^0)_*(\gamma)) + \text{Sign}(E)$$

により定める. ここで, $\theta(\mathcal{F}^0)_*$ は \mathcal{F}^0 に対する分類写像 $\theta(\mathcal{F}^0)$ の誘導する $\pi_1(\Delta \setminus \{p\})$ から $\Pi(4)$ への準同型.

3 つ組 (E, π, B) が次を満たすとき種数 3 非超楕円的ファイブレーションと呼ぶ:

1. E (resp. B) 向き付けられた C^∞ 級の閉 4 (resp. 2) 次元多様体で $\pi: E \rightarrow B$ は C^∞ 級写像,
2. 有限個の点 $b_1, \dots, b_n \in B$ が存在して π の $B \setminus \{b_1, \dots, b_n\}$ への制限は種数 3 非超楕円族.

$i = 1, \dots, n$ に対して, π を b_i の近傍に制限することで \mathcal{NH}_3 の元を得る. それを \mathcal{F}_i と書く.

定理 7.2 (符号数公式). (E, π, B) を種数 3 非超楕円的ファイブレーションとする. このとき,

$$\text{Sign}(E) = \sum_{i=1}^n \text{loc.sig}^{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_i).$$

証明. $i = 1, \dots, n$ に対して b_i を中心とする小さい閉円板 D_i をとると $\mathcal{F}_i = (\pi^{-1}(D_i), \pi, D_i, b_i)$ である. $B_0 := B \setminus \bigcup_{i=1}^n \text{Int} D_i$ とおく. Meyer の符号数公式 ([13]Satz 1) より,

$$\text{Sign}(\pi^{-1}(B_0)) = \sum_{i=1}^n \phi^4(\theta(\mathcal{F}_i^0)_*(\gamma))$$

が分かる. 最後に Novikov 加法性から

$$\begin{aligned} \text{Sign}(E) &= \text{Sign}(\pi^{-1}(B_0)) + \sum_{i=1}^n \text{Sign}(\pi^{-1}(D_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \phi^4(\theta(\mathcal{F}_i^0)_*(\gamma)) + \sum_{i=1}^n \text{Sign}(\pi^{-1}(D_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{loc.sig}^{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_i). \end{aligned}$$

□

系 7.3. $g: E \rightarrow B$ を向き付けられた閉曲面 B 上の種数 3 非超楕円族とすると, $\text{Sign}(E) = 0$ が成り立つ.

いくつか例を計算する.

I 型特異ファイバー芽. $\Delta \subset \mathbb{P}(4)$ を D と中心 $p \in \Delta$ のみで横断的に交わる 2 次元の閉円板とする. $\pi_I: E_I \rightarrow \Delta$ を $\bar{F} \rightarrow \mathbb{P}(4)$ の Δ への制限とする. こうして $\mathcal{F}_I = (E_I, \pi_I, \Delta, p) \in \mathcal{NH}_3$ が得られる. $\pi_I^{-1}(p)$ の位相型は Lefschetz の I 型であるので, \mathcal{F}_I を I 型特異ファイバーと呼ぶ. E_I の符号数は 0 であり, 包含写像 $\Delta \setminus \{p\} \hookrightarrow \mathbb{P}(4) \setminus D \hookrightarrow (\mathbb{P}(4) \setminus D)_{PGL(3)}$ は \mathcal{F}_I^0 の分類写像に他ならず, Δ の境界は D に関するなげなわである. 命題 5.1 から, 次が得られる.

命題 7.4.

$$\text{loc.sig}^{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_I) = -\frac{5}{9}.$$

超楕円的ファイバー芽. $F \in V^4 \setminus \{0\}$ を C_F が非特異コニック $C: yz - x^2 = 0$ と 8 点で交わる様な多項式, Δ を $0 \in \mathbb{C}$ の周りの小さい閉円板で複素座標を s とする. S_F を方程式

$$(yz - x^2)^2 + s^2 F(x, y, z) = 0.$$

で定まる $\Delta \times \mathbb{P}^2$ の超曲面とする. S_F は $C' = \{0\} \times C$ に沿って特異点を持つ. C に沿って $\Delta \times \mathbb{P}^2$ をブローアップし, \widetilde{S}_F を S_F の狭義引き戻し, $\pi: \widetilde{S}_F \rightarrow \Delta$ を $\widetilde{S}_F \rightarrow S_F$ と第一成分への射影 $S_F \rightarrow \Delta$ の合成とする. すると \widetilde{S}_F は非特異で, 例外因子 $\pi^{-1}(0)$ は非特異な種数 3 の超楕円曲線であり, 自然な射影 $\pi^{-1}(0) \rightarrow C' \cong \mathbb{P}^1$ は 2 重被覆である.

Δ を十分小さくとり, π の特異ファイバーが π^{-1} のみになるようにする. $\mathcal{F}_h = (\widetilde{S}_F, \pi, \Delta, 0)$ とおき, このファイバー芽を超楕円的ファイバー芽と呼ぶ. 対応して ℓ_h を

$$\ell_h(t) = (yz - x^2)^2 + (\varepsilon e^{2\pi\sqrt{-1}t})^2 F(x, y, z), \quad 0 \leq t \leq 1$$

で定義される $\mathbb{P}(4) \setminus D$ のループとする. ここで ε は Δ の半径.

命題 7.5.

$$\text{loc.sig}^{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_h) = \bar{\phi}^4([\ell_h]) = \frac{4}{9}.$$

証明. まず, 超楕円的ファイバー芽は位相的には自明であるから $\text{loc.sig}^{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_h) = \bar{\phi}^4([\ell_h])$ である. $[\ell_h]$ も $\text{Sign}(\widetilde{S}_F)$ も F の少しの摂動で不変であるから, ある特定の F に対し主張を示せばよい. 十分一般の F に対し, 写像

$$\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}(4), [w_0: w_1] \mapsto w_0^2(yz - x^2)^2 + w_1^2 F(x, y, z)$$

は E と交わらず D と横断的になる. このとき

$$w_0^2(yz - x^2)^2 + w_1^2 F(x, y, z) = 0$$

で定まる $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ 内の曲面 S は $\{[1: 0]\} \times C$ に沿ってのみ特異点を持つ. このコニックに沿って S をブローアップしたものを \widetilde{S} とする. \widetilde{S} は非特異であり, $\widetilde{S} \rightarrow S \rightarrow \mathbb{P}^1$ は $[1: 0]$

の上にある超楕円的ファイバー芽以外の特異ファイバーとしてI型のみを持つ種数3非超楕円的ファイブレーションとなる。 \tilde{S} の不変量は $c_1^2(\tilde{S}) = -6$, $c_2(\tilde{S}) = 18$, $\text{Sign}(\tilde{S}) = -14$ と計算される. するとI型特異ファイバーの本数は Euler 数寄与に等しく,

$$18 - 2(2 - 2 \cdot 3) = 26$$

である. 定理 7.2 と命題 7.4 より

$$-14 = -\frac{5}{9} \times 26 + \text{loc.sig}^{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_h)$$

を得る. 従って $\text{loc.sig}^{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_h) = \frac{4}{9}$ である. □

II型特異ファイバー芽. Δ を前の例の通りとし, S を

$$z^3x + y^2x^2 + y^4 + s^6x^4 = 0$$

で定まる $\Delta \times \mathbb{P}^2$ の超曲面とする. S は $p_0 = (0, [1: 0: 0])$ において \tilde{E}_8 型の孤立特異点を持つ. 第一成分への射影 $p_1: S \rightarrow \Delta$ による $0 \in \Delta$ の逆像 C_2 は幾何種数 2 でカスプを 1 つ持つ代数曲線である.

$\varpi: \tilde{S} \rightarrow S$ を p_0 における S の特異点の最小解消とする. 例外曲線 C_1 は自己交叉数 -1 の非特異な楕円曲線である. Δ を十分小さくして, $\mathcal{F}_{II} = (\tilde{S}, p_1 \circ \varpi, \Delta, 0) \in \mathcal{NH}_3$ を得る. 特異ファイバー $(p_1 \circ \varpi)^{-1}(0)$ の位相型は, C_1 と C_2 の非交和から C_1 の 1 点と C_2 のカスプ特異点を同一視したもの, つまり Lefschetz の II 型である. \mathcal{F}_{II} を II 型特異ファイバー芽と呼ぶ.

対応して ℓ_{II} を

$$\ell_{II}(t) = z^3x + y^2x^2 + y^4 + (\varepsilon e^{2\pi\sqrt{-1}t})^6x^4, \quad 0 \leq t \leq 1$$

で定義される $\mathbb{P}(4) \setminus D$ のループとする. 命題 7.5 の証明と同様にして次が計算できる. 今度は \tilde{S} の交叉形式が $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ であるため, $\text{Sign}(\tilde{S}) = -1$ となることに注意.

命題 7.6.

$$\text{loc.sig}^{\mathcal{Q}}(\mathcal{F}_{II}) = \frac{1}{3}, \quad \bar{\phi}^4([\ell_{II}]) = \frac{4}{3}.$$

参考文献

- [1] T.Ashikaga and H.Endo, Various aspects of degenerate families of Riemann surfaces, SUGAKU EXPOSITIONS, Volume 19, Number 2, December 2006.
- [2] T.Ashikaga and K.Konno, Global and local properties of pencils of algebraic curves, Algebraic Geometry 2000 Azumino, Advanced Studies in Pure Mathematics 36 (2000), 1-49.
- [3] J.Birman and H.Hilden, On mapping class groups of closed surfaces as covering spaces, Advances in the Theory of Riemann Surfaces, Ann.Math.Stud.66, Princeton Univ.Press, 1971, 81-115.

- [4] P.Barth-K.Hulek-A.M.Peters-Van de Ven, Compact complex surfaces, Springer, Second Enlarged Edition (2003).
- [5] F.R.Cohen, Homology of mapping class groups for surfaces of low genus, *Contemp.Math.* **58** (1987), 21-30.
- [6] A.Dimca, Singularities and topology of hypersurfaces, Springer-Verlag (1992).
- [7] H.Endo, Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations, *Math. Ann.* **316** (2000), 237-257.
- [8] I.M.Gelfand-M.M.Kapranov-A.V.Zelevinsky, Discriminants, resultants and multidimensional determinants, Birkhäuser (1994)
- [9] N.Kawazumi, On the homotopy type of the moduli space of n -point sets of \mathbb{P}^1 , *J.Fac.Sci.Univ. Tokyo Ser.IA.* **37** (1990), 263-287.
- [10] Y.Kuno, The mapping class group and the Meyer function for plane curves, [arXiv:math.GT/0707.4332](https://arxiv.org/abs/math/0707.4332)
- [11] K.Lamotke, The topology of complex projective varieties after S.Lefschetz, *Topology*, Vol.**20**, (1981), 15-51.
- [12] Y.Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two -a topological approach-, *Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on "Topology and Teichmüller Spaces"*, World Scientific, Singapore, 1996, 123-148.
- [13] W.Meyer, Die Signatur von Flächenbündeln, *Math. Ann.* **201** (1973), 239-264.
- [14] T.Morifuji, On Meyer's function of hyperelliptic mapping class groups, *J.Math.Soc.Japan* **55** (2003), 117-129.
- [15] S.Nag, *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*, A Wiley-Interscience Publication (1988).
- [16] K.Yoshikawa, A local signature for generic 1-parameter deformation germs of a complex curve, in: *Algebraic Geometry and Topology of Degenerations, Coverings and Singularities* (2000), 188-200 (in Japanese).

YUSUKE KUNO
 GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES,
 THE UNIVERSITY OF TOKYO,
 3-8-1 KOMABA MEGURO-KU TOKYO 153-0041, JAPAN
 E-mail address:kunotti@ms.u-tokyo.ac.jp