

Lurie さんの楕円コホモロジー

南 範彦 (名古屋工業大学)

1. INTRODUCTION

quasi category の観点から derived algebraic geometry を推し進め, その応用として elliptic cohomology を同変版まで込めて極めて見通しよく定義した Jacob Lurie さんの仕事は, 現在世界のホモトピー論で最も注目を集めている仕事と言っても過言はないと思われます. ただ残念ながら, その完全な詳細はまだ発表されていないようですが, Lurie さんのホームページ <http://www-math.mit.edu/~lurie/> には, 43 ページの “Survey article on elliptic cohomology” が置いてあります.

本講演では, 主にこの survey から抽出・構成した以下の概略に従い, Lurie さんの仕事の同変部分を中心に解説する予定です. なお, 金沢でのホモトピー論シンポジウムでは, quasi category を中心に解説する予定です.

2. 何故 DERIVED ALGEBRAIC GEOMETRY ?

2.1. 代数幾何からの動機-Bezout の定理の一般化を通して.

定理 2.1 (曲線の Bezout の定理 - 横断正則の場合). 各々の次数が m, n の smooth curve $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{C}P^2$ が $C_1 \pitchfork C_2$ なら, $\# |C_1 \cap C_2| = mn$.

このとき, $[C_1], [C_2] \in H^2(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ で,

$$[C_1 \cap C_2] = [C_1] \cup [C_2] \in H^4(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$

ここで $C_1 \cap C_2$ は有限集合で, variety 論的な意味づけが出来る.

定理 2.2 (曲線の Bezout の定理 - 横断正則と限らない場合). 各々の次数が m, n の smooth curve $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{C}P^2$ が $C_1 \not\pitchfork C_2$, $\# |C_1 \cap C_2| < \infty$ なら, $\# |C_1 \cap C_2| < mn$. しかしながら, $\# |C_1 \cap C_2| < \infty$ の場合は一般に,

$$\sum_{p \in C_1 \cap C_2} IM_p(C_1, C_2) = mn; \quad IM_p(C_1, C_2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^2, p} / (f, g).$$

このとき, (Chow ring で) $[C_1 \cap C_2] = [C_1] \cup [C_2]$ となるように, $C_1 \cap C_2$ の scheme 論的な意味づけが出来る.

定理 2.3 (一般次元の Bezout の定理 = Serre の定理). (i) $\deg C_1 = m, \dim C_1 = a, \deg C_2 = n, \dim C_2 = b$ なる smooth subvariety $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{C}P^d$, ($a + b = d$) が $C_1 \pitchfork C_2$ なら, $\# |C_1 \cap C_2| = mn$.

(ii) $C_1 \not\pitchfork C_2, \# |C_1 \cap C_2| < \infty$ の場合は,

$$\sum_{p \in C_1 \cap C_2} IM_p(C_1, C_2) = mn; \quad IM_p(C_1, C_2) = \sum_{i \geq 0} \dim_{\mathbb{C}} \text{Tor}_i^{\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^2, p}}(\mathcal{O}_{C_1, p}, \mathcal{O}_{C_2, p}).$$

このとき, (もっと sophisticate な意味で) $[C_1 \cap C_2] = [C_1] \cup [C_2]$ となるように, $C_1 \cap C_2$ の derived scheme 論的な意味づけが出来る (らしい).

2.2. 代数的位相幾何学からの動機 Cohomology と Steenrod 代数を通して.

定理 2.4 (Mandell). 単位元付きの可換環 R と位相空間 X に対し, $H^n(X; R) = \pi_{-n}(HR^X)$ となる E_∞ -ring spectrum HR^X がある. X が単連結で有限型の時,

(i) E_∞ -ring spectrum $H\mathbb{Z}^X$ から X のホモトピー型を回復できる.

(ii) E_∞ -ring spectrum $H\mathbb{Z}/p^X$ から X_p^\wedge のホモトピー型を回復できる.

注意 (mod-2 Steenrod 代数 \mathcal{A}^* の mod-2 コホモロジーへの作用 Derived 観点).

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^* \otimes H^*(X; \mathbb{Z}/2) &\rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}/2) \\ H^*(X; \mathbb{Z}/2) &\rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}/2) \otimes \mathcal{A}_* \\ \text{Spec} \mathcal{A}_* \times \text{Spec} H^*(X; \mathbb{Z}/2) &\rightarrow \text{Spec} H^*(X; \mathbb{Z}/2)\end{aligned}$$

で $X = \mathbb{R}P^\infty$ と置くと, 可換 formal group law \tilde{G}_a を通して, 代数群 $\text{Aut} \tilde{G}_a$ の affine scheme $\text{Spec} H^*(X; \mathbb{Z}/2)$ への作用を得る:

$$\begin{aligned}\text{Spec} \mathcal{A}_* \times \text{Spec} \mathbb{F}_2[[t]] &\rightarrow \text{Spec} \mathbb{F}_2[[t]], \quad \text{Spec} \mathcal{A}_* \times \tilde{G}_a \rightarrow \tilde{G}_a, \quad \text{Spec} \mathcal{A}_* \simeq \text{Aut} \tilde{G}_a; \\ \text{Aut} \tilde{G}_a \times \text{Spec} H^*(X; \mathbb{Z}/2) &\rightarrow \text{Spec} H^*(X; \mathbb{Z}/2)\end{aligned}$$

ここで, この derived version を考えるためには,

$$\begin{aligned}H\mathbb{Z}/2^X &\rightarrow H\mathbb{Z}/2^X \wedge (H\mathbb{Z}/2 \wedge H\mathbb{Z}/2) \\ \text{Spec}(H\mathbb{Z}/2 \wedge H\mathbb{Z}/2) \times \text{Spec}(H\mathbb{Z}/2^X) &\rightarrow \text{Spec}(H\mathbb{Z}/2^X)\end{aligned}$$

を「derived 代数群 $\text{Spec}(H\mathbb{Z}/2 \wedge H\mathbb{Z}/2)$ の derived affine scheme $\text{Spec}(H\mathbb{Z}/2^X)$ への作用」と理解したいのである.

3. E_∞ -RING SPECTRUM から DERIVED SCHEME へ

3.1. E_∞ -ring spectrum 例とそれらのなす“圏”quasi category.

予告 3.1 (E_∞ ring のなす層と derived scheme の大雑把な定義).

(i) 位相空間 X 上の E_∞ -ring のなす層 \mathcal{F} とは, X の開集合 U, V に対して,

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}(U \cup V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(U \cup V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U \cap V)\end{array}$$

が, quasi category から定まる homotopy pullback となる時をいう.

(ii) E_∞ -ring spectrum A の derived affine scheme $\text{Spec} A$ とは, 通常の Zariski 位相が与えられた位相空間 $\text{Spec}(\pi_0 A)$ 上の E_∞ -ring の構造層 $\mathcal{O}_{\text{Spec} A}$ 付き空間

$$\text{Spec} A = (\text{Spec}(\pi_0 A), \mathcal{O}_{\text{Spec} A})$$

で, $f \in \pi_0 A$ に対応する開集合 $U_f = \{\mathfrak{P} \mid f \notin \mathfrak{P}\}$ で

$$\mathcal{O}_{\text{Spec} A}(U_f) = A[f^{-1}]$$

となる E_∞ -ring $A[f^{-1}]$ が与えられるものである.

(iii) derived scheme (X, \mathcal{O}_X) とは, 位相空間 X 上の E_∞ -ring の構造層 \mathcal{O}_X 付き空間で, 局所的に derived affine scheme が貼り合されて出来たものである:

$$(X, \mathcal{O}_X) \stackrel{\text{locally}}{\simeq} (\text{Spec}(\pi_0 A), \mathcal{O}_{\text{Spec} A})$$

凶報. derived scheme のなす圏は, cocomplete でない

\implies model 圏にならない!

吉報. (i) derived scheme のなす圏は, quasi category になる.

(ii) (A . Joyal) quasi category では, 写像空間が単体集合として定義でき, さらにそれは Kan 複体となる.

4. QUASI CATEGORY

4.1. Quasi Category の背景 Kan 複体 と Category の Nerve.

事実. (i) 単体集合 S に対し,

$$S \text{ が Kan 複体} \iff 0 \leq \forall i \leq n, \begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \xrightarrow{\forall f_i} & S \\ \downarrow & \nearrow \exists f & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

(ii) 単体集合 S に対し,

$$S \text{ が小圏 } c \text{ の nerve } N(c) \text{ に } \cong \iff 0 < \forall i < n, \begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \xrightarrow{\forall f_i} & S \\ \downarrow & \nearrow \exists 1f & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

4.2. Quasi Category とそこでの写像空間の定義.

定義 4.1. 単体集合 S に対し,

$$S \text{ が } \underline{\text{quasi category}} \iff 0 < \forall i < n, \begin{array}{ccc} \Lambda_i^n & \xrightarrow{\forall f_i} & S \\ \downarrow & \nearrow \exists f & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

注意. 定義より *quasi category* は, *Kan 複体* S と小圏 c の *nerve* $N(c)$ を共に一般化する. それゆえ, *quasi category 論* は, 通常ホモトピー論と (small) *category 論* を共に一般化する理論と思える.

定義-命題 4.2 (Joyal). *quasi category* \mathcal{C} に対し,

- \mathcal{C}_0 の元を object と呼ぶ.
- \mathcal{C}_1 の元を morphism と呼ぶ.
- $X, Y \in \mathcal{C}_0$ に対し, 単体集合

$$\text{Map}'_{\mathcal{C}}(X, Y)_n = \{ \sigma \in \mathcal{C}_{n+1} \mid \sigma \text{ の最初の頂点は } X; \text{ その対面は } Y \text{ に退化} \}$$

は Kan 複体となる.

定義 4.3. *quasi category* \mathcal{C} に対し, object $X \in \mathcal{C}$ は initial \iff

$$\forall f_0 : \partial \Delta^n \rightarrow \mathcal{C}, \text{ s.t. } f_0(\{0\}) = X, \quad \exists f : \Delta^n \rightarrow \mathcal{C}, \text{ s.t. } f|_{\partial \Delta^n} = f_0.$$

定理 4.4. \mathcal{C} に対し, object $X \in \mathcal{C}$ は initial $\iff \forall Y \in \mathcal{C}, \text{Map}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は可縮.

4.3. Quasi Category の例および性質.

例 4.5 (既にみた *quasi category* の例).

- 位相空間 X の特異単体集合 $S_*(X)$.
- 小圏 c の *nerve* $N(c)$.

定義-定理 4.6 (Lurie). t を小位相圏 (よって各 Hom 集合が位相空間になっている) とするとき, 以下のように定義される単体集合 $\mathcal{N}(t)$ は, quasi-category となる:

$$\mathcal{N}(t)_0 = \{t \text{ の objects } \}$$

$$\mathcal{N}(t)_1 = \{t \text{ の morphisms } \}$$

$$\mathcal{N}(t)_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{可換 と限らない 図式} \\ \begin{array}{ccc} & Y & \\ f \nearrow & & \searrow g \\ X & \xrightarrow{h} & Z \end{array} \end{array} \text{ 及び, } \text{Hom}_t(X, Z) \text{ における } h \text{ から } g \circ f \text{ への道} \right\}$$

$\mathcal{N}(t)_3$ は, 次の 4 種類のデータによって与えられる:

- (1) 4 つの objects: $W, X, Y, Z \in t$.

(2) 6 つの morphisms: $\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_{X,Y}} & Y \\ f_{W,X} \searrow & & \nearrow f_{Y,Z} \\ & W & \xrightarrow{f_{W,Z}} & Z \\ & & \nearrow f_{X,Z} & \end{array}$ (可換 と限らない 図式)

- (3) 4 つの道: $f_{W,Y} \rightarrow f_{X,Y} \circ f_{W,X}, \quad f_{X,Z} \rightarrow f_{Y,Z} \circ f_{X,Y},$
 $f_{W,Z} \rightarrow f_{Y,Z} \circ f_{W,Y}, \quad f_{W,Z} \rightarrow f_{X,Z} \circ f_{W,X}$

(4) $\text{Hom}_t(W, Z)$ における右の閉道の拡張:

$$\begin{array}{ccc} f_{W,Z} & \longrightarrow & f_{X,Z} \circ f_{W,X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_{Y,Z} \circ f_{W,Y} & \longrightarrow & f_{Y,Z} \circ f_{X,Y} \circ f_{W,Y} \end{array}$$

$\mathcal{N}(t)_n (n \geq 4)$: 以上を繰り返す.

定理 4.7 (Lurie). S が simplicial 小圏の時も, $\mathcal{N}(t)$ と同様の構成 $\mathcal{N}(S)$ が存在する. 更に, S のすべての写像空間が Kan 複体なら, $\mathcal{N}(S)$ は quasi category となる.

系 4.8 (Lurie). simplicial model category \mathcal{A} に対し, その fibrant かつ cofibrant な object からなる部分圏を \mathcal{A}^0 とおくと, $\mathcal{N}(\mathcal{A}^0)$ は quasi category になる.

定理 4.9 (Shipley). E_∞ -ring spectrum A 上の E_∞ -ring spectrum のなす圏 Alg_A は simplicial model category をなす.

定義-系 4.10. E_∞ -ring spectrum A 上の E_∞ -ring spectrum のなす圏 Alg_A の fibrant かつ cofibrant な object からなる部分圏 Alg_A^0 より, quasi category $\mathcal{N}(\text{Alg}_A^0)$ が定まる. これを, A -algebra のなす quasi category とよぶ.

注意. (i) 小位相圏 t に対し, $S_*(t)$ で特異単体集合関手を射の位相空間に適応させていられる simplicial category とすると, $\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(S_*(t))$.

(ii) Alg_A はまた, 位相圏としても得られる. これからも quasi category が得られ, これも A -algebra のなす quasi category と呼ばれ, これらは quasi category として同値となる. 以下の derived scheme の構成では, むしろこちらの位相圏から得られる quasi category が使われる.

5. DERIVED SCHEME

5.1. Quasi Category の Derived Scheme 構成への応用.

E_∞ -ring spectrum A に対応する derived affine scheme $\text{Spec} A$ を構成する上で必要となる, quasi category $\mathcal{C} = \mathcal{N}(\text{Alg}_A^0)$ に値を持つ, $\text{Spec} \pi_0 A$ 上の前層 \mathcal{F} の構成:

方針: \mathcal{P} を, $\text{Spec} \pi_0 A$ の $f \in \pi_0 A$ の開集合 $U_f = \{\mathfrak{P} \mid f \notin \mathfrak{P}\}$ からなる poset とし, \mathcal{F} を単体写像

$$\mathcal{F}: N(\mathcal{P}^{op}) \rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{N}(\text{Alg}_A^0)$$

として, step-by-step に構成する.

0-simplex: $\mathcal{F}(U_f)$ を構成する. この時,

$$\mathcal{C}[f^{-1}] := \text{Alg}_A^0 \text{ に属する } A\text{-algebra } B \text{ で } f \text{ が } \pi_0(B) \text{ で可逆となる}$$

ものからなる \mathcal{C} の simplicial subcategory

は initial object $A[f^{-1}] \in \mathcal{C}[f^{-1}]$ を持つ. これを用いて,

$$\mathcal{F}(U_f) = A[f^{-1}]$$

とおく.

n -simplex ($n > 0$): $\mathcal{F}(U_{f_0} \subseteq U_{f_1} \subseteq \dots \subseteq U_{f_n})$ を構成する. $\mathcal{F}|_{\partial \Delta^n}$ は帰納法の仮定より構成されている. その δ^n への拡張は, まさに $A[f_0^{-1}]$ が $\mathcal{C}[f_0^{-1}]$ が initial object であるという定義そのものから従う:

$$\begin{array}{ccc} \partial \Delta^n & \xrightarrow{\mathcal{F}|_{\partial \Delta^n}} & \mathcal{C}[f_0^{-1}] \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

定義-命題 5.1. derived scheme の圏は, 位相圏となる:

$$\text{Hom}((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)) = \prod_{f: X \rightarrow Y} \text{Hom}_0(\mathcal{O}_Y, f_* \mathcal{O}_X) \subseteq \prod_{f: X \rightarrow Y} \text{Hom}(\mathcal{O}_Y, f_* \mathcal{O}_X)$$

ここで, $\text{Hom}_0(\mathcal{O}_Y, f_* \mathcal{O}_X)$ は, $\text{Hom}(\mathcal{O}_Y, f_* \mathcal{O}_X)$ の中で各 $x \in X$ に対し local 準同型 $\pi_0 \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \pi_0 \mathcal{O}_{X, x}$ を誘導する E_∞ -ring の層の間の local map からなる部分空間を表す. これから定まる quasi category を, derived scheme のなす quasi category とよぶ.

定義 5.2. derived scheme (X, \mathcal{O}_X) から得られる X 上の通常の前層

$U (\subseteq X) \mapsto \pi_0(\mathcal{O}_X(U))$ の層化を $\pi_0 \mathcal{O}_X$ と書き, $(X, \pi_0 \mathcal{O}_X)$ を (X, \mathcal{O}_X) の

underlying ordinary scheme と呼び, しばしば $\overline{(X, \mathcal{O}_X)}$ と書く.

5.2. flat 射と etale 射.

定義 5.3. (i) E_∞ -ring の間の射 $f: A \rightarrow B$ が flat とは, 以下が成立する時をいう:

- (1) $\pi_0 f: \pi_0 A \rightarrow \pi_0 B$ が通常の意味で flat.
- (2) $\pi_i A \otimes_{\pi_0 A} \pi_0 B \simeq \pi_i B \ (\forall i)$

(ii) derived scheme の間の射 $p: X \rightarrow Y$ が flat であるとは, 局所的に (i) の意味で flat の時をいう.

定義 5.4. (i) E_∞ -ring の間の射 $f: A \rightarrow B$ が etale とは, 以下が成立する時をいう:

- (1) $\pi_0 f: \pi_0 A \rightarrow \pi_0 B$ が通常の意味で etale.
- (2) $\pi_i A \otimes_{\pi_0 A} \pi_0 B \simeq \pi_i B \ (\forall i)$

(ii) derived scheme の間の射 $p: X \rightarrow Y$ が etale であるとは, 局所的に (i) の意味で etale の時をいう.

5.3. derived X -scheme, X -group.

定義 5.5. (i) derived X -scheme 上の derived scheme を, derived X -scheme と呼ぶ. derived X -scheme のなす圏も, derived scheme のなす圏と同様, 位相圏となり, それから quasi-category が得られる. これを, derived X -scheme のなす quasi category とよぶ.

(ii) derived scheme X に対し, \mathcal{G} が, X 上の derived commutative group scheme, 或いは単に commutative X -group, とは, 以下の条件が満たされる時をいう:

- (1) \mathcal{G} は, 位相関手 $\mathcal{G} : \{X\text{-schemes}\} \rightarrow \{\text{topological abelian groups}\}$
- (2) 合成位相関手 $\{X\text{-schemes}\} \xrightarrow{\mathcal{G}} \{\text{topological abelian groups}\} \rightarrow \{\text{topological spaces}\}$ は, up to homotopy 同値で, X 上 flat な derived X -scheme によって表現される.

$X = \text{Spec} A$ の時, 言葉の乱用により, commutative X -group のことを, commutative A -group と呼んだりもする.

6. 同変コホモロジー論 DERIVED ALGEBRAIC GEOMETRY の観点から

6.1. Derived Scheme 上の Quasi-coherent sheaf.

吉報. E_∞ -ring A に対して, A -module spectrum の良い理論がある.

\implies derived scheme X 上の \mathcal{O}_X -module \mathcal{M} で, 各 affine 開集合 U 上で $\mathcal{M}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ -module spectrum となるようなものを考察できる.

定義 6.1. (i) E_∞ -ring A に対して, A -module spectrum M にたいして,

$$\tilde{M}(U_f) := M[f^{-1}] = M \otimes_A A[f^{-1}]$$

によって特徴づけられる, $\mathcal{O}_{\text{Spec} A}$ -module \tilde{M} が存在する.

(ii) derived scheme X 上の層 \mathcal{M} が quasi-coherent

$$\stackrel{\text{定義}}{\iff} (X, \mathcal{O}_X, \mathcal{M}) \stackrel{\text{locally}}{\simeq} (\text{Spec} A, \mathcal{O}_{\text{Spec} A}, \tilde{M})$$

6.2. E_∞ -ring spectrum と orientation から可換同変コホモロジー論へ. 最初に, E_∞ -ring A によって定まる乗法的コホモロジー論の S^1 -同変版を構成したい.

ヒント. $A_{S^1}^*(*)$ は $A(\mathbb{C}P^\infty)$ と似通っている.

そこで, derived affine scheme $\text{Spec} A$ 上の derived commutative group scheme $\mathcal{G} \rightarrow \text{Spec} A$ で, $A_{S^1} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}) \rightarrow A^{\mathbb{C}P^\infty}$ が E_∞ -ring として「似ている」(良い)射を探したい. ところが,

$$\begin{aligned} A_{S^1} \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}) &\rightarrow A^{\mathbb{C}P^\infty} \\ \iff \mathbb{C}P^\infty \times \mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}) &\rightarrow A \\ \iff \mathbb{C}P^\infty &\rightarrow \text{Hom}_{\text{Alg-}A}(\mathcal{O}_{\mathcal{G}}(\mathcal{G}), A) \\ \iff \mathbb{C}P^\infty &\rightarrow \text{Hom}_{\text{Spec} A}(\text{Spec} A, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(A). \end{aligned}$$

なので, まずは最後の写像が, 可換位相群の準同型という特別な(良い)場合を考える. すると,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^\infty &\xrightarrow{\text{準同型}} \text{Hom}_{\text{Spec} A}(\text{Spec} A, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(A) \\ \iff (S^2, *) &\rightarrow \text{Hom}_{\text{Spec} A}(\text{Spec} A, \mathcal{G}) = \mathcal{G}(A). \end{aligned}$$

定義 6.2. $\eta : (S^2, *) \rightarrow \mathcal{G}(A)$ を, preorientation と呼ぶ.

定義 6.3. (i) コンパクト位相アーベル群 T に対し, $T^\vee \stackrel{\text{定義}}{:=} \text{Hom}_{cont}(T, S^1)$ とおく.
(ii) derived affine scheme $\text{Spec}A$ 上の derived group scheme \mathcal{G} が与えられた時,

$$\mathcal{G}_T \stackrel{\text{定義}}{:=} \text{Hom}_{\text{位相群}}(T^\vee, \mathcal{G})$$

命題 6.4. \mathcal{C} を, コンパクト位相アーベル群 T の分類空間 BT のホモトピー型を持つ位相空間のなす圏とすると, 次の2つを与えることは同値:

- (1) preorientation $\eta: (S^2, *) \rightarrow \mathcal{G}(A)$.
- (2) 反変位相関手 $\tilde{\mathcal{G}}: \mathcal{C} \rightarrow \{\text{derived } A\text{-schemes}\}$ で, 関手的ホモトピー同値 $\tilde{\mathcal{G}}(BT) \simeq \mathcal{G}_T$ があるもの

定理 6.5. 各コンパクト位相アーベル群 T に対して, 反変関手

$$\mathcal{F}_T: \{\text{有限 } T\text{-CW 複体}\} \rightarrow \{\mathcal{G}_T \text{ 上の } \text{quasi-coherent 層}\}$$

の集まり $\{\mathcal{F}_T\}$ が, 以下の条件を満たすよう, 本質的に一意に存在する:

- (1) $\mathcal{F}_T: T$ -同変ホモトピー同値 \mapsto *quasi-coherent sheaf* の同値
- (2) $\mathcal{F}_T: T$ -空間の有限 *homotopy colimit* \mapsto *quasi-coherent sheaf* の有限 *homotopy limit*
- (3) $\mathcal{F}_T: \text{一点集合} \mapsto \mathcal{O}_{\mathcal{G}_T}$
- (4) $f: T \subseteq T'$ により定まる *derived } A\text{-schemes}* の射 $f: \mathcal{G}_T \rightarrow \mathcal{G}_{T'}$ によって誘導される *quasi coherent sheaf* の間の *direct image* 射 f_* は, 次を満たす:

$$f_*\mathcal{F}_T(X) = \mathcal{F}_{T'}(X \times_T T')$$

定義 6.6. 有限 T -CW 複体とその部分複体 $X_0 \subseteq X$ に対し,

$$\mathcal{F}_T(X, X_0) \stackrel{\text{定義}}{:=} \text{fiber of } (\mathcal{F}_T(X) \rightarrow \mathcal{F}_T(X_0))$$

よって, E_∞ -ring $A_T(X) := \Gamma(\mathcal{G}_T, \mathcal{F}_T(X))$ を用いて, X の T -同変 A 理論:

$$A_T^n(X) := \pi_{-n}(A_T(X))$$

が定義でき, 有限 T -CW 複体とその部分複体 $X_0 \subseteq X$ に対して, ファイバー列

$$\mathcal{F}_T(X, X_0) \rightarrow \mathcal{F}_T(X) \rightarrow \mathcal{F}_T(X_0)$$

が T -同変 A 理論の長完全列を誘導するのである.

凶報. このままでは, A_T^* は $RO(T)$ -次数付にならない!

そのために, 特別な preorientation を考える必要がある.

定義-命題 6.7. (i) derived group scheme $\mathcal{G} \rightarrow \text{Spec}A$ の underlying ordinary group scheme $\mathcal{G}_0 \rightarrow \text{Spec}\pi_0 A$ の identity section $\text{Spec}\pi_0 A \rightarrow \mathcal{G}_0$ により, \mathcal{G}_0 上の微分のなす層 $\Omega_{\mathcal{G}_0/\pi_0 A}$ を $\text{Spec}\pi_0 A$ に引き戻した層を, ω と表す.

その大域切断のなす $\pi_0 A$ -可群も, ω と表す.

(ii) preorientation $\eta: (S^2, *) \rightarrow \mathcal{G}(A)$ に対し, derived affine subscheme $\text{Spec}B = U \subseteq \mathcal{G}$ を, identity section $\text{Spec}A \rightarrow \mathcal{G}$ を含むようにとり,

$$\eta: (S^2, *) \rightarrow \mathcal{G}(A) = \text{Hom}(\text{Spec}A, \mathcal{G})$$

$$\iff \eta: (S^2, *) \rightarrow \mathcal{G}(A) = \text{Hom}(\text{Spec}A, \text{Spec}B) = \text{Hom}(B, A)$$

$$\iff B \times S^2 \rightarrow A, \quad (B = B \times * \rightarrow A \text{ は identity section に対応})$$

$$\iff B \rightarrow A^{S^2}, \quad (A^{S^2} \rightarrow A^* = A \text{ との合成は identity section に対応})$$

$$\implies \pi_0 A\text{-代数準同型 } \pi_0 B \rightarrow \pi_0(A^{S^2}) = \pi_0 A \oplus \pi_2 A, \quad (\text{第一成分は identity section により誘導})$$

$$\iff \pi_0 A\text{-derivation } \pi_0 B \rightarrow \pi_2 A$$

$$\iff \beta: \pi_0 A\text{-module 準同型 } \omega \rightarrow \pi_2 A$$

によって, $\pi_0 A$ -module 準同型 $\beta: \omega \rightarrow \pi_2 A$ を定義する.

定義 6.8. preorientation $\eta: (S^2, *) \rightarrow \mathcal{G}(A)$ が orientation とは, 次の条件が満たされる時をいう:

- (1) $\mathcal{G} \rightarrow \text{Spec} A$ の underlying ordinary scheme 射 $\mathcal{G}_0 \rightarrow \text{Spec} \pi_0 A$ は smooth で 相対次元 1
- (2) $\pi_0 A$ -module 準同型 $\beta: \omega \rightarrow \pi_2 A$ はすべての $n \in \mathbb{Z}$ に対し, 同型を誘導:

$$\pi_n A \otimes_{\pi_0 A} \omega \xrightarrow{\sim} \pi_{n+2} A$$

定義-命題 6.9. \mathcal{G} : oriented A -group, T : コンパクト位相アーベル群, V : T の有限次元ユニタリー表現, $SV \subset BV$: V の単位球面および単位球. とする.

- (i) quasi coherent sheaf $\mathcal{L}_V := \mathcal{F}_T(BV, SV)$ は, \mathcal{G}_T 上の line bundle.
- (ii) すべての有限 T -CW 複体 X にたいし, 自然な射

$$\mathcal{L}_V \otimes \mathcal{F}_T(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_T(X \times BV, X \times SV)$$

は同値となる.

これより,

- すべての T の有限次元ユニタリー表現 V, V' に対し, 次は同値: $\mathcal{L}_V \otimes \mathcal{L}_{V'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{V \oplus V'}$
 $\implies T$ の有限次元 virtual ユニタリー表現 V に対しても, \mathcal{L}_V は定義できる
 \implies すべての有限 T -CW 複体 X と, T の有限次元 virtual ユニタリー表現 V に対して,

$$A_T^V(X) := \pi_{-n}(\Gamma(\mathcal{G}_T, \mathcal{F}_T(X) \otimes \mathcal{L}_V^{-1}))$$

とおき, $RO(T)$ -次数付, 同変コホモロジー論 A_T^* が定義できる.

6.3. E_∞ -ring spectrum と orientation から一般の同変コホモロジー論へ.

命題 6.10. 各コンパクトリー群 G に対して, 反変関手

$$A_G: \{G\text{-CW 複体}\} \rightarrow \{\text{スペクトラム}\}$$

の集まり $\{A_G\}$ が, 以下の条件を満たすよう, 本質的に一意的に存在する:

- (1) $A_G: G$ -同変ホモトピー同値 \mapsto スペクトラムのホモトピー同値
- (2) $A_G: G$ -空間の *homotopy colimit* \mapsto スペクトラムの *homotopy limit*
- (3) コンパクトリー群とその閉部分群 $H \subseteq G$ および H -CW 複体 X に対し, 自然なホモトピー同値が存在する:

$$A_H(X) \simeq A_G((X \times_H G))$$

- (4) $G = T$, コンパクト位相アーベル群かつ, X が有限 T -CW 複体の場合は,

$$A_T(X) = \Gamma(\mathcal{G}_T, \mathcal{F}_T(X)).$$

- (5) G -CW 複体 $E^{ab}G$ を, G の閉部分群 H に対し,

$$(E^{ab}G)^H = \begin{cases} \emptyset & \text{if } H \text{ は非可換} \\ \text{弱可縮} & \text{if } H \text{ は可換} \end{cases}$$

によって特徴づけられるものとする. すると, すべての G -CW 複体 X に対し, 自然な写像

$$A_G(X) \xrightarrow{\sim} A_G(X \times E^{ab}G)$$

はホモトピー同値となる.

注意. (5) が, $A_G(X)$ の構成をすでに起こったコンパクト位相アーベル群 T に対する A_T の構成に帰着できる. この (5) が極めて一般的に成立することは, *Hopkins-Kuhn-Ravenel* により知られている.

凶報. このままでは, A_G^* は $RO(G)$ -次数付にならない..

7. LURIE さんの ELLIPTIC COHOMOLOGY 論

7.1. Derived Scheme 上の Oriented Derived Elliptic Curve.

定義 7.1. derived scheme の射 $p: E \rightarrow X$ が, derived scheme X 上の derived elliptic curve とは, 次が成立する時をいう:

- (1) p は flat で, E は commutative X -group を表現する.
- (2) p の誘導する underlying scheme の射 $\bar{p}: \bar{E} \rightarrow \bar{X}$ は, 通常の意味での scheme \bar{X} 上の elliptic curve.

定義 7.2. oriented derived elliptic curve は, derived elliptic curve $E \rightarrow X$ で, orientation $(\bar{S}^2, *) \rightarrow \text{Hom}_{X\text{-scheme}}(X, E)$ が与えられたもの.

7.2. Derived Deligne-Mumford Stack.

定義 7.3. derived Deligne-Mumford stack (X, \mathcal{O}_X) とは, E_∞ -ring の構造層 \mathcal{O}_X 付き topos X で, 局所的に derived affine etale topos が貼り合されて出来たものである:

$$(X, \mathcal{O}_X) \overset{\text{locally}}{\simeq} (\text{Spec} \pi_0 A, \mathcal{O}_{\text{Spec} A})$$

(ここで, $(\text{Spec} \pi_0 A, \mathcal{O}_{\text{Spec} A})$ は, E_∞ -ring A の etale topos.

定義 7.4. derived Deligne-Mumford stack (X, \mathcal{O}_X) から得られる X 上の通常の前層 $U(\overset{\text{“open”}}{\rightarrow} X) \mapsto \pi_0(\mathcal{O}_X(U))$ の層化を $\pi_0 \mathcal{O}_X$ と書き, $(X, \pi_0 \mathcal{O}_X)$ を (X, \mathcal{O}_X) の underlying ordinary Deligne-Mumford stack と呼び, しばしば $\overline{(X, \mathcal{O}_X)}$ と書く.

7.3. 主定理 Oriented Derived Elliptic Curve のなす Derived Moduli Stack とその上の sheaf の構成.

定理 7.5. *derived Deligne-Mumford stack* \mathcal{M}^{der} で, 次の条件を満たすものが存在する:

- (1) $\text{Hom}(X, \mathcal{M}^{der}) \simeq \{ \text{oriented derived elliptic curve over } X \}$.
- (2) $\overline{\mathcal{M}^{der}} \simeq \text{elliptic curve の古典的 moduli stack}$.
- (3) $\overline{\mathcal{M}^{der}}$ 上の標準直線束を ω と置くと, 通常の可換環 R に対し,

$$\omega: \{ R \text{ 上の古典的な elliptic curve} \} \mapsto \{ R\text{-加群} \}$$

により, $E \mapsto \text{Lie}(E)^\vee \cong E$ 上の不変微分のなす R -加群 となり, そのすべての冪 ω^k ($k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) を集めて大域切断を取って得られる次数付環

$$\Gamma(\overline{\mathcal{M}^{der}}, \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \omega^k)$$

は, \mathbb{Z} 上の moduli form のなす環 と呼ばれ,

$$\Gamma(\overline{\mathcal{M}^{der}}, \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \omega^k) \cong \mathbb{Z}[c_4, c_6, \Delta] / (c_4^3 - c_6^2 - 1728\Delta)$$

となる. ここで, すべての冪 ω^k が $\mathcal{O}_{\mathcal{M}^{der}}$ から得られるのである:
 $\forall i \in \mathbb{Z}, \exists \overline{\mathcal{M}^{der}}$ 上の quasi-coherent sheaf としての同型が存在する:

$$\pi_i \mathcal{O}_{\mathcal{M}^{der}} \simeq \begin{cases} 0 & \text{if } i \text{ は奇数} \\ \omega^k & \text{if } i = 2k, \text{ 偶数} \end{cases}$$

系 7.6 (Hopkins-Miller). *elliptic curve* の古典的 *moduli stack* $\overline{\mathcal{M}^{der}}$ 上の E_∞ -ring のなす層が存在して,

$$\Gamma(\overline{\mathcal{M}^{der}}, \mathcal{O}_{\overline{\mathcal{M}^{der}}}) \simeq tmf[\Delta^{-1}]$$

右辺はしばしば EO_2 と書かれ, 周期 $24^2 = 576$ の一般コホモロジー論となる.

7.4. 定理 7.5(1)(2) 証明の手法-Artin Representability Criterion の Derived 類似. 定理 7.5(1)(2) の証明では, 次の結果が極めて大きな役割をはたしているが, 現時点で完全な詳細を私は理解していない.

命題 7.7 (Lurie - Artin Representability Criterion の Derived 類似).

位相関手 $\mathcal{F} : \{ \text{連結 } E_\infty\text{-rings} \} \rightarrow \{ \text{位相空間} \}$ が次の条件を満たすとすると:

- (1) 古典的 *Deligne-Mumford stack* $(\mathcal{X}, \mathcal{O})$ が存在して, $\mathcal{F} \mid_{\{ \text{通常の可換環} \}}$ を表現する:

$$\forall \text{可換環 } R, \mathcal{F}(R) \simeq B \text{Hom}(\text{Spec}R, \mathcal{X}, \mathcal{O}),$$

ここで, $B \text{Hom}(\text{Spec}R, \mathcal{X}, \mathcal{O})$ は *groupoid* $\text{Hom}(\text{Spec}R, \mathcal{X}, \mathcal{O})$ の分類空間.

- (2) \mathcal{F} は *etale descent* を満たす.

- (3) \mathcal{F} には “良い性質を持った” *deformation theory* がある.

\implies *derived Deligne-Mumford stack* $(\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{O}})$ が存在して, \mathcal{F} を表現する.

7.5. 定理 7.5(3)) 証明の手法-Serre-Tate 定理の Derived 類似.

定義 7.8. A を E_∞ -ring とし, 位相関手 $\mathcal{G} : \{ \text{可換 } A\text{-代数} \} \rightarrow \{ \text{位相アーベル群} \}$ は以下の条件を満たす時, A 上 height h の derived p -divisible group と呼ばれる:

- (1) 位相関手 \mathcal{G} は, $\{ \text{可換 } A\text{-代数} \}$ の flat 位相に関して, *quasi category* の意味で層をなす.
- (2) 各自然数 n に対し, 積 $p^n : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ は flat 位相に関して全射で核 $\mathcal{G}[p^n]$ を持つ.
- (3) flat 位相に関する位相アーベル群の層として, $\text{colim} \mathcal{G}[p^n] \simeq \mathcal{G}$.
- (4) $\forall n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathcal{G}[p^n]$ は, A 上有限かつ flat で rank p^{nh} の, commutative A -group となる.

定理 7.5(3) の証明では, 次の結果が極めて大きな役割をはたしているが, 現時点で完全な詳細を私は理解していない.

命題 7.9 (Lurie-Serre-Tate 定理の Derived 類似). E_∞ -ring A に対し, $\pi_0 A$ は完備局所ネーター環で, その剰余体の標数が $p > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\pi_n A$ は有限生成 $\pi_0 A$ 加群とすると, *quasi category* の *cartesian* 図式が存在する:

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{derived affine schme } \text{Spec}A \text{ 上の derived elliptic curves } E \} & \longrightarrow & \{ A \text{ 上の derived } p\text{-divisible groups } E[p^\infty] \} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{ \text{affine schme } \text{Spec}k \text{ 上の elliptic curves } E_0 \} & \longrightarrow & \{ k \text{ 上の } p\text{-divisible groups } E_0[p^\infty] \} \end{array}$$