対称的写像類群の abel 化

東京大学大学院数理科学研究科　佐藤正寿

1　はじめに

g を正の整数, $r = 0, 1$ とする．種数が g であり, 境界の連結成分を r 個もつ種数 g のコンパクト有向曲面を $\Sigma_{g,r}$ で表す．曲面 $\Sigma_{g,r}$ の向きを保ち, 境界の各点を固定する微分同相写像のイソトピー類全体のなす群を写像類群と呼び, $\mathcal{M}_{g,r} := \pi_0 \operatorname{Diff}_+(\Sigma_{g,r}, \partial\Sigma_{g,r})$ で表す．

写像類群の指数有限部分群のホモロジー群を求めることは写像類群において重要な問題の一つである．しかし, 一般には整係数一次ホモロジー群, つまり abel 化すら一般には知られていない．指数有限部分群の一例として, 整数 $d > 0$ について, level d 写像類群 $\mathcal{M}_{g,r}[d]$ とよばれるものがある．これは, 写像類群 $\mathcal{M}_{g,r}$ の $H_1(\Sigma_{g,r}; \mathbf{Z}/d\mathbf{Z})$ への作用において, その作用が自明である元全体のなす部分群である．これは, level d 構造をもつ種数 g の Riemann 面の moduli 空間の orbifold 基本群に一致する．

写像類群の曲面の一次ホモロジー群 $H_1(\Sigma_{g,r}; \mathbf{Z})$ への作用において, 自明に作用する元全体のなす部分群を $\mathcal{I}_{g,r}$ と表し, 以下では Torelli 群とよぶ．McCarthy[12] により $r = 0$ の場合に, より一般に Hain[5] により次の定理が示された．

Theorem 1.1 (McCarthy, Hain)**.** *$g \geq 3$, $r \geq 0$ とする．$\mathcal{M}$ が写像類群 $\mathcal{M}_{g,r}$ の指数有限の部分群であり, Torelli 群を含むとする．このとき,*

$$H_1(\mathcal{M}; \mathbf{Q}) = 0.$$

上の定理からは, 整係数一次ホモロジー群の有限群としての情報は得られない．Farb により写像類群の未解決な問題の一つとして, 指数有限部分群 $\mathcal{M}_{g,r}[d]$ の abel 化を計算することを [2] Problem 5.23 p.43. において挙げている．

現在までに abel 化が決定されている写像類群の指数有限部分群として, spin 写像類群とよばれる曲面のスピン構造を保つ写像類群の部分群がある．Harer[6] は, Lee-Miller-Weintraub[11] により構成されたスピン写像類群から $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ への準同型が全射であることを示した．この準同型の構成には Igusa[7] における theta multiplier とよばれる解析的に定義される数が使われている．

曲面 $\Sigma_{g,r}$ 上の有限 (不) 分岐 Galois 被覆 $p : \Sigma_{\hat{g},\hat{r}} \to \Sigma_{g,r}$ において, Birman-Hilden[1] は対称的写像類群 $\hat{\mathcal{M}}_{(g,r)}(p)$ とよばれる群を定義した．この群は写像類群のいくつかの指数有限部分群と密接に関係している．特に不分岐被覆の場合には, 写像類群 $\mathcal{M}_{g,r}$ のある指数有限部分群 $\mathcal{M}_{g,r}(p)$ の有限群拡大となっている．p が abel 被覆である場合には, その指数有限部分群は Torelli 群を含み, McCarthy, Hain の結果から $H_1(\hat{\mathcal{M}}_{(g,r)}(p); \mathbf{Q}) = 0$ であることもわかる．しかし abel 化については一般に知られていない．

本稿では, 不分岐 2 重被覆 $p : \Sigma_{2g-1,2r} \to \Sigma_{g,r}$ について, その対称的写像類群, および関係する写像類群の指数有限部分群の abel 化を決定することができたのでこれについて述べる．そのために, 対称的写像類群から巡回群 $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ への全射準同型を構成したが, その準同型には, Riemann-theta 定数, Schottky-theta 定数, theta multiplier などの解析的な数を用いる．これにより, abel 化について, 下からの評価が得られる．特にこの準同型の定義について述べる．上からの評価は, Igusa[7] による symplectic 群のある指数有限部分群の生成元, Johnson[9] による Torelli 群の abel 化などの情報を用いて得られるが, 詳しくはここでは述べない．また, この結果を用いて level d 写像類群の abel 化の情報が得られる．なお, level d 写像類群の abel 化については, theta multiplier を用いた準同型や Kawazumi[10] における Johnson 準同型を用いた準同型により, 部分的には既に知られている．

$H_1(\Sigma_{g,r}; \mathbf{Z})$ の symplectic 基底を 1 つ固定すると, 写像類群 $\mathcal{M}_{g,r}$ の $H_1(\Sigma_{g,r}; \mathbf{Z})$ への作用は, 全射準同型

$$\iota : \mathcal{M}_{g,r} \to Sp(2g; \mathbf{Z}),$$

を誘導する．ι による $\mathcal{M}_{g,r}(p)$ の像を $\Gamma_g(p)$ と表す．主定理は次のものである．

Theorem 1.2. $r=0,1$ について, 種数 $g\geq 4$ とするとき,

$$H_1(\hat{\mathcal{M}}_{(g,r)}(p);\mathbf{Z})\cong H_1(\mathcal{M}_{g,1}(p);\mathbf{Z})\cong \mathbf{Z}/4\mathbf{Z},$$
$$H_1(\mathcal{M}_g(p);\mathbf{Z})\cong \begin{cases}\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, & \textit{if}\ \ g: \textit{odd},\\ \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, & \textit{if}\ \ g: \textit{even},\end{cases}$$
$$H_1(\Gamma_g(p);\mathbf{Z})\cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

定理 1.2 を用いると, 偶数 d について多くの準同型 $\mathcal{M}_{g,1}[d]\to \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ を得ることがわかる.

Proposition 1.3. 偶数 $d>0$ に対し, 単射準同型

$$(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^{2g}\hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_{g,1}[d];\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$$

が存在する. また, $d=2$ かつ g が偶数について

$$(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^{2g}\hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_{g}[2];\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$$

が存在する.

2 対称的写像類群の定義

一般に, 不分岐 Galois 被覆 $p:\Sigma_{\hat{g},\hat{r}}\to\Sigma_{g,r}$ の対称的写像類群は次のように定義される. 以下, p の被覆変換群を $\mathrm{Deck}(p)$ で表す.

Definition 2.1. $C(p)$ を微分同相群 $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_{\hat{g},\hat{r}})$ における $\mathrm{Deck}(p)$ の中心化群とする. 被覆 p の対称的写像類群は

$$\hat{\mathcal{M}}_{(g,r)}(p)=\pi_0(C(p)\cap \mathrm{Diff}_+(\Sigma_{\hat{g},\hat{r}},\partial\Sigma_{\hat{g},\hat{r}}))$$

により定義される.

$\hat{f}\in C(p)\cap \mathrm{Diff}_+(\Sigma_{\hat{g},\hat{r}},\partial\Sigma_{\hat{g},\hat{r}})$ について, 微分同相 $f\in \mathrm{Diff}_+(\Sigma_{g,r},\partial\Sigma_{g,r})$ がただ一つ存在して 図式

$$\begin{array}{ccc}\Sigma_{\hat{g},\hat{r}} & \xrightarrow{\hat{f}} & \Sigma_{\hat{g},\hat{r}}\\ {\scriptstyle p}\downarrow & & {\scriptstyle p}\downarrow\\ \Sigma_{g,r} & \xrightarrow{f} & \Sigma_{g,r}\end{array}$$

を可換にする. 微分同相 $f\in \mathrm{Diff}_+(\Sigma_{g,r},\partial\Sigma_{g,r})$ を $\hat{f}\in C(p)\cap \mathrm{Diff}_+(\Sigma_{\hat{g},\hat{r}},\partial\Sigma_{\hat{g},\hat{r}})$ の射影とよぶことにする. $[\hat{f}],[\hat{g}]\in\hat{\mathcal{M}}_{(g,r)}(p)$ が $[\hat{f}]=[\hat{g}]$ を満たすとき, $\hat{f}$ と $\hat{g}$ のイソトピーは底空間 $\Sigma_{g,r}$ の微分同相である射影 f, g の間にイソトピーを誘導する. したがって, 準同型

$$\begin{array}{cccc}P: & \hat{\mathcal{M}}_{(g,r)}(p) & \to & \mathcal{M}_{g,r},\\ & [\hat{f}] & \mapsto & [f]\end{array}$$

を定義できる. この像 $\mathrm{Im}\,P\subset\mathcal{M}_{g,r}$ は写像類群 $\mathcal{M}_{g,r}$ の指数有限部分群であることがわかる. 以下ではこれを $\mathcal{M}_{g,r}(p)$ で表すこととする. ここで, $r=0$ のとき P の核は被覆変換のイソトピー類, $r=1$ のとき $\mathrm{Ker}\,P=id$ となることがわかる. 特に, $r=0,1$ いずれの場合も $\mathrm{Ker}\,P$ は有限群である. 群拡大

$$1\to\mathrm{Ker}\,P\to\hat{\mathcal{M}}_{(g,r)}(p)\to\mathcal{M}_{g,r}(p)\to 0,$$

において, Lyndon-Hochschild-Serre spectral sequence から

$$H_*(\hat{\mathcal{M}}_{(g,r)}(p);\mathbf{Q})\cong H_*(\mathcal{M}_{g,r}(p);\mathbf{Q})$$

を得る.

3 Jacobi 多様体と Prym 多様体

以下では $g \geq 2$ とする．また, 1 の累乗根 ζ に対し, $<\zeta>$ により ζ で生成される巡回群を表す．

対称的写像類群は同型をのぞいて不分岐 2 重被覆のとり方によらないことがわかる．したがって, 以下の議論は若干の変更のもとで不分岐 2 重被覆のとり方によらずに同様に成り立つが, ここでは簡単のため不分岐 2 重被覆を次のように固定する．曲面 $\Sigma_{g,r}$ において, $H_1(\Sigma_{g,r};\mathbf{Z})$ の symplectic 基底 $\{A_i, B_i\}_{i=1}^{g}$ を固定する．不分岐 2 重被覆 $p:\Sigma_{2g-1,2r}\to\Sigma_{g,r}$ として, 被覆の monodromy 準同型 $\pi_1(\Sigma_{g,r})\to\mathbf{Z}_2$ を $H^1(\Sigma_{g,r};\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ の元とみたとき, $B_g\in H_1(\Sigma_{g,r};\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ の Poincare 双対に一致するものを取る．

曲面 Σ_g に Riemann 面の構造を与え, これを R と表す．このとき, 被覆写像 $p:\Sigma_{2g-1}\to\Sigma_g$ は被覆空間 Σ_{2g-1} に Riemann 面の構造を誘導し, これを $\hat{R}$ と表す．この節では, Riemann 面 R における Jacobi 多様体と, 不分岐二重被覆 $p:\hat{R}\to R$ における Prym 多様体を復習する．

以下では, 列ベクトル $m \in \mathbf{Z}^{2g}$ のことを g-characteristic とよぶ． $m'=(m'_1,m'_2,\cdots,m'_g)$, $m''=(m''_1,m''_2,\cdots,m''_g)\in\mathbf{Z}^g$ を用いて, $m=(m'|m'')$ と表す．g-chatacteristic m を $\sum_{i=1}^{g} m'_i m''_i$ が even(odd) のとき, even(odd) とよぶ．

次数 g の Siegel 上半空間を $\mathfrak{S}_g := \{M\in M_n(\mathbf{C}) \mid {}^tM=M, \operatorname{Im}M>0\}$ と表す． g-characteristic $m=(m'|m'')\in\mathbf{Z}^{2g}$, $\tau\in\mathfrak{S}_g$, $z\in\mathbf{C}^g$ について, theta 関数 θ_m は

$$\theta_m(\tau,z) := \sum_{p\in\mathbf{Z}^g}\exp(\pi i\{(p+m'/2)\tau^t(p+m'/2)+(p+m'/2)^t(z+m''/2)\}).$$

により定義される．$\theta_m(\tau,0)$ を単に $\theta_m(\tau)$ と表し, これを theta 定数とよぶ. Ω を正則 1-形式のなす層とする．準同型

$$\begin{array}{ccl} H_1(R;\mathbf{Z}) & \to & H^0(R;\Omega)^* \quad := \operatorname{Hom}(H^0(R;\Omega),\mathbf{C}), \\ c & \mapsto & (\omega\mapsto\int_c\omega) \end{array}$$

において, $H_1(R;\mathbf{Z})$ は $H^0(R;\Omega)^*$ の lattice にうつされることが知られている．R の Jacobi 多様体とは

$$J(R)=\frac{H^0(R;\Omega)^*}{H_1(R;\mathbf{Z})}$$

により定義される偏極 abel 多様体である．この abel 多様体と symplectic 基底 $\{A_i,B_i\}_{i=1}^{g}$ の組に対し, 周期行列とよばれる $\tau\in\mathfrak{S}_g$ が定まる．g-characteristic $m=(m'|m'')$, 周期行列 τ について, $\theta_m(\tau)$ は Riemann 面 R の symplectic 基底 $\{A_i,B_i\}_{i=1}^{g}$ に伴う Riemann-theta 定数とよばれる．

$\hat{R}\to R$ の被覆変換群の生成元を $t:\hat{R}\to\hat{R}$ で表し, $t_*:H_1(\hat{R};\mathbf{Z})\to H_1(\hat{R};\mathbf{Z})$ の (-1)-固有空間を

$$H_1(\hat{R};\mathbf{Z})^-=\{c\in H_1(\hat{R};\mathbf{Z}) \mid t_*(c)=-c\},$$

$t^*:H^0(\hat{R};\Omega)\to H^0(\hat{R};\Omega)$ の (-1)-固有空間を

$$H^0(\hat{R};\Omega)^-=\{\omega\in H^0(\hat{R};\Omega) \mid t^*(\omega)=-\omega\}$$

と表す．準同型

$$\begin{array}{ccl} H_1(\hat{R};\mathbf{Z}) & \to & H^0(\hat{R};\Omega)^* \quad := \operatorname{Hom}(H^0(\hat{R};\Omega),\mathbf{C}), \\ c & \mapsto & (\omega\mapsto\int_c\omega) \end{array}$$

において, $H_1(\hat{R};\mathbf{Z})^-$ は $(H^0(R;\Omega)^-)^*$ の lattice にうつる．被覆 p の Prym 多様体 $\operatorname{Prym}(\hat{R},p)$ とは

$$\operatorname{Prym}(\hat{R},p)=\frac{(H^0(\hat{R};\Omega)^-)^*}{H_1(\hat{R};\mathbf{Z})^-}\subset J(\hat{R}).$$

により定義される偏極 abel 多様体である．

$H_1(R;\mathbf{Z})$ の symplectic 基底 $\{A_i,B_i\}_{i=1}^{g}$ について, 次のように $H_1(\hat{R};\mathbf{Z})$ の基底をとる．$i=1,2,\cdots,g-1$ について, A_i の 2 つのリフト $\hat{A}_i$, $\hat{A}_{i+g}$, B_i の 2 つのリフト $\hat{B}_i$, $\hat{B}_{i+g}$ であり,

$$\hat{A}_i\cdot\hat{B}_i=1$$

を満たすように定める．$2A_g$, B_g のリフトはただ 1 つ定まり，これらをそれぞれ $\hat{A}_g$, $\hat{B}_g$ と表す．このとき，$\{A_i - A_{g+i}, B_i - B_{g+i}\}_{i=1}^{g-1}$ は $H_1(\hat{R};\mathbf{Z})^-$ の基底をなす．さらに $H_1(\hat{R};\mathbf{Z})^-$ の基底 $\{\hat{A}_i - \hat{A}_{g+i}, \hat{B}_i - \hat{B}_{g+i}\}_{i=1}^{g-1}$ は

$$(\hat{A}_i - \hat{A}_{g+i})\cdot(\hat{A}_j - \hat{A}_{g+j}) = 0,\ (\hat{B}_i - \hat{B}_{g+i})\cdot(\hat{B}_j - \hat{B}_{g+j}) = 0$$
$$(\hat{A}_i - \hat{A}_{g+i})\cdot(\hat{B}_j - \hat{B}_{g+j}) = 2\delta_{i\,j}.$$

を満たす．したがって，$\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{M}}_{(g)}(p)$ の $\{\hat{A}_i - \hat{A}_{g+i}, \hat{B}_i - \hat{B}_{g+i}\}_{i=1}^{g-1}$ への作用は，準同型

$$\tilde{\iota} : \hat{\mathcal{M}}_{(g)}(p) \to \mathrm{Sp}(2g-2;\mathbf{Z})$$

を誘導する．また，この abel 多様体と symplectic 基底 $\{\hat{A}_i - \hat{A}_{g+i}, \hat{B}_i - \hat{B}_{g+i}\}_{i=1}^{g-1}$ の組に対し，周期行列 $\tilde{\tau} \in \mathfrak{S}_{g-1}$ が定まる．

Definition 3.1. *even* $(g-1)$*-characteristic* $\tilde{m} = (\tilde{m}'|\tilde{m}'')$, $\mathrm{Prym}(\hat{R},p)$ の周期行列 $\tilde{\tau}$ について，$\theta_{\tilde{m}}(\tilde{\tau})$ は被覆 $p : \hat{R} \to R$ と *symplectic* 基底 $\{\hat{A}_i, \hat{B}_i\}_{i=1}^{2g-1}$ に伴う *Schottky-theta* 定数と呼ばれる．

4　準同型 $e : \hat{\mathcal{M}}_g(p) \to <\sqrt{-1}>$ の定義

この節では，準同型 $e : \hat{\mathcal{M}}_{(g)}(p) \to <\sqrt{-1}>$ の定義を与える．τ を Riemann 面 R の周期行列，$\tilde{\tau}$ を被覆 p の周期行列とする．even g-characteristics m, n と even $(g-1)$-characteristic $\tilde{m}$ について，関数

$$\Phi_{m,n}^{\tilde{m}}(\tilde{\tau},\tau) = \frac{\tilde{\theta}_{\tilde{m}}^2(\tilde{\tau})}{\theta_m(\tau)\theta_n(\tau)}$$

を考える．generic な Riemann 面と被覆 p について，$\Phi_{m,n}^{\tilde{m}}(\tilde{\tau},\tau)$ は非零な複素数になることが知られている (Fay[4])．g 次正方行列 $M = (m_{ij})$ に対し，対角成分を取って得られる列ベクトルを $M_0 := (m_{11}, m_{22}, \cdots, m_{gg}) \in \mathbf{Z}^g$ と表す．$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2g;\mathbf{Z})$, g-characteristic m に対し，

$$\sigma \cdot m = m \begin{pmatrix} {}^t\alpha & -{}^t\gamma \\ -{}^t\beta & {}^t\delta \end{pmatrix} + (({}^t\beta\alpha)_0 | ({}^t\delta\gamma)_0) \in \mathbf{Z}^{2g}$$

と定める．これは，$\mathrm{Sp}(2g;\mathbf{Z})$ の $\mathbf{Z}^{2g}$ への作用ではないことに注意する．even $(g-1)$-characteristic $\tilde{m}$ について，g-characteristics $m = (\tilde{m}', 0|\tilde{m}'', 1)$, $n = (\tilde{m}', 0|\tilde{m}'', 0)$ を取る．このとき $d_{\tilde{m},(\tilde{\tau},\tau)} : \hat{\mathcal{M}}_{(g)}(p) \to \mathbf{C}$ を

$$d_{\tilde{m},(\tilde{\tau},\tau)}(\hat{\varphi}) := \frac{\Phi_{m,n}^{\tilde{m}}(\tilde{\tau},\tau)}{\Phi_{\iota(\varphi)\cdot m, \iota(\varphi)\cdot n}^{\tilde{\iota}(\hat{\varphi})\cdot\tilde{m}}(\tilde{\tau},\tau)}$$

により定義する．$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2g;\mathbf{Z})$, $\tau \in \mathfrak{S}_g$ について，$\mathfrak{S}_g$ への $\mathrm{Sp}(2g;\mathbf{Z})$ 作用を

$$\sigma \cdot \tau := (\delta\tau + \gamma)(\beta\tau + \alpha)^{-1}$$

により定めると，theta 関数の変換則 (Igusa[8])

$$\theta_{\sigma\cdot m}(\sigma\cdot\tau) = \gamma_m(\sigma)\det(\beta\tau+\alpha)^{-\frac{1}{2}}\theta_m(\tau)$$

が成り立つ．ここで，$\gamma_m(\sigma) \in <\exp(\pi\sqrt{-1}/4)>$ は theta multiplier とよばれる．

$\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{M}}_{(g)}(p)$, even $(g-1)$-characteristic $\tilde{m}$ について，$m = (\tilde{m}', 0|\tilde{m}'', 1)$, $m = (\tilde{m}', 0|\tilde{m}'', 0)$ をとる．関数 $e_{\tilde{m}}$ を

$$e_{\tilde{m}}(\hat{\varphi}) := d_{\tilde{m}}(\hat{\varphi})\frac{\gamma_{\tilde{m}}^2(\tilde{\iota}(\hat{\varphi}))}{\gamma_m(\iota P(\hat{\varphi}))\gamma_n(\iota P(\hat{\varphi}))}$$

により定義する．$d_{\tilde{m}}$ が $\hat{\varphi} \in \hat{\mathcal{M}}_{(g)}(p)$ と $\tilde{m} \in \mathbf{Z}^{g-1}$ にしかよらないことを示す上で，Schottky-Jung 関係式とよばれる次の定理が重要である．

Theorem 4.1 (Farkas-Rauch[3])**.**
even $(g-1)$*-characteristic* $\tilde{m}$ について, *g-characteristics* $m = (\tilde{m}', 0|\tilde{m}'', 1)$, $n = (\tilde{m}', 0|\tilde{m}'', 0)$ とする. このとき, $\Phi^{\tilde{m}}_{m,n}(\tilde{\tau}, \tau)$ は $\tilde{m}$ のとり方によらない.

これを用いると次の定理が示される.

Theorem 4.2. 写像 $e_{\tilde{m}}$ は準同型であり, その像 $e_{\tilde{m}}(\hat{\varphi})$ は $< \sqrt{-1} >$ に一致する. また, $e_{\tilde{m}}(\hat{\varphi})$ は *even g-characteristic* $\tilde{m}$ のとり方によらない.

theta multiplier はその値が求められており, 具体的に値を計算することによりこの準同型が全射であることもわかる. これにより, 対称的写像類群の abel 化についての下からの評価が与えられる.

参考文献

[1] J.S. Birman and H.M. Hilden, *On Isotopies of Homeomorphisms of Riemann Surfaces*, The Annals of Mathematics **97** (1973), no. 3, 424–439.

[2] B. Farb, *Some problems on mapping class groups and moduli space*, Arxiv preprint math.GT/0606432 (2006).

[3] H.M. Farkas and H.E. Rauch, *Period Relations of Schottky Type on Riemann Surfaces*, The Annals of Mathematics **92** (1970), no. 3, 434–461.

[4] J.D. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*, Springer, 1973.

[5] R. Hain, *Torelli groups and Geometry of Moduli Spaces of Curves*, Current Topics in Complex Algebraic Geometry (CH Clemens and J. Kollar, eds.) MSRI publications **28** (1995), 97–143.

[6] J. L. Harer, *The rational Picard group of the moduli space of Riemann surfaces with spin structure*, Contemp. Math **150** (1993), 107–136.

[7] J. Igusa, *On the Graded Ring of Theta-Constants*, American Journal of Mathematics **86** (1964), no. 1, 219–246.

[8] ———, *Theta functions*, Springer, 1972.

[9] D. Johnson, *The structure of the Torelli Group III: The abelianization of* $\mathcal{I}_g$, Topology **24** (1985), no. 2, 127–144.

[10] N. Kawazumi, *Cohomological Aspects of Magnus Expansions*, Arxiv preprint math.GT/0505497 (2005).

[11] R. Lee, E. Miller, and S. Weintraub, *The Rochlin invariant, theta functions and the holonomy of some determinant line bundle*, J. reine angew. Math **392** (1988), 187–218.

[12] J.D. McCarthy, *On the first cohomology group of cofinite subgroups in surface mapping class groups*, Topology **40** (2000), no. 2, 401–418.