

# Chevalley-Koszul 複体について

## (On the Chevalley-Koszul complex)

大阪大学大学院 理学研究科 山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)  
Graduate School of Science, Osaka University

### 1 はじめに

$G$  をコンパクトで連結な Lie 群,  $\mathfrak{g}$  をその Lie 代数, そして  $\pi : P \rightarrow B$  を主  $G$ -束とする.  $\{c_j\}$  を  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$  の primitive な生成元,  $\{p^j\}$  をその双対基底に Chevalley's transgression theorem によって対応する  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  の生成元とすると, 複体

$$\Omega(B) \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}, \quad d \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota^\wedge(c_j),$$

が  $P$  の不変な微分形式による複体  $\Omega(P)_{\text{inv}}$  と擬同型であることは, Chevalley と Koszul により示された有名な結果である. Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は次を主張した.

**主張 1.** 下に有界な DG(differential graded)  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群の圏において, 上の主張は成り立つ.

ただし Maszczyk-Weber [5] は [2] の証明にギャップがあることを指摘し, 新たに証明を与えた. しかし Alekseev-Meinrenken [1] によって新しい証明にもギャップがあることを指摘されたが, Alekseev-Meinrenken [1] は主張 1 の一般化である次の主張 2 を述べ証明を与えた.  $W\mathfrak{g} := S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$  を Weil 代数とする. 主  $G$ -束  $P \rightarrow B$  に対して  $\Omega(P)$  は, Chern-Weil 理論により,  $W\mathfrak{g}$ -加群になることから,  $\Omega(P)$  の一般化として  $\mathfrak{g}$ -微分  $W\mathfrak{g}$ -加群という概念が Alekseev-Meinrenken により導入された. そして  $\mathfrak{g}$ -微分  $W\mathfrak{g}$ -加群  $\mathcal{N}$  に対して, 彼らは複体

$$\mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}, \quad d \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota(c_j),$$

を Chevalley-Koszul 複体と呼んだ.

**主張 2 ([1, Theorem 5.5]).** 任意の  $\mathfrak{g}$ -微分  $W\mathfrak{g}$ -加群  $\mathcal{N}$  に対して,  $\mathcal{N}$  の Chevalley-Koszul 複体は  $\mathcal{N}_{\text{inv}}$  と, DG  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群の圏において, ホモトピー同値である.

$G$  が多様体  $X$  に作用しているときの  $\Omega(X)$  の一般化として  $\mathfrak{g}$ -微分空間が定義されたのだが, これを調べる上でそれに対する同変コホモロジーの Cartan モデルが重要な道具であることはよく知られている. [2], [5], そして [1] で指摘されているように, この主張と Koszul 双対性を使えば, 下に有界な  $\mathfrak{g}$ -微分空間に対して, その同変コホモロジーの小 Cartan モデルと Cartan モデルが同型であることが従うのであった. さらに [6] において主張 2 を用いて次が示された.

**主張 3.** 任意の  $\mathfrak{g}$ -differential  $W\mathfrak{g}$ -module  $\mathcal{N}$  に対して, cocomplete DG  $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$ -余加群の圏において, 弱同値  $\mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}$  が存在する.

そしてこの主張と Lefèvre [4] によって得られた Koszul 双対性の拡張を用いれば, (下に有界であるとは限らない)  $\mathfrak{g}$ -微分空間に対して, その同変コホモロジーの小 Cartan モデルと Cartan モデルが同型であることが, [6] において示されたのであった.

しかし [1] の主張 2 の証明にはギャップがあることがわかったので, 本稿では主張 2 に新しい証明を与える.

## 2 $\mathfrak{g}$ -微分空間

$(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}})$  を標数 0 の体  $\mathbb{F}$  上の Lie 代数とする.

**定義 2.1.**  $\mathfrak{g}$ -空間とは DG 空間  $(\mathcal{M}, d^{\mathcal{M}})$ , そして線型写像

$$L^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{M}),$$

の組であり, 以下の条件をみたすものとする:

- $\xi \in \mathfrak{g}$  に対して  $L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$  の次数はそれぞれ  $0, -1$ ,
- $[d^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}}(\xi)] = L^{\mathcal{M}}(\xi)$ ,
- $[L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = \iota^{\mathcal{M}}([\xi, \xi']_{\mathfrak{g}})$ ,
- $[\iota^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = 0$ . □

以下では  $\mathfrak{g}$ -微分空間  $\mathcal{M}$  に対して,  $\mathcal{M}_{\text{inv}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker L^{\mathcal{M}}(\xi)$ ,  $\mathcal{M}_{\text{hor}} := \bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$ , そして  $\mathcal{M}_{\text{basic}} := \mathcal{M}_{\text{inv}} \cap \mathcal{M}_{\text{hor}}$  と表す.

$\wedge \mathfrak{g}^*$  を  $\mathfrak{g}^*$  の外積代数として, その次数を

$$(\wedge \mathfrak{g}^*)^i := \wedge^i \mathfrak{g}^*,$$

と定める. また  $S\mathfrak{g}^*$  を  $\mathfrak{g}^*$  の対称代数として, その次数を

$$(S\mathfrak{g}^*)^{2i} := S^i \mathfrak{g}^*, \quad (S\mathfrak{g}^*)^{2i+1} := 0$$

と定める.  $\{e_a\}$  を  $\mathfrak{g}$  の基底,  $\{e^a\}$  をその双対基底とする. 以下では

$$y^a := e^a \in \wedge^1 \mathfrak{g}^*, \quad v^a := e^a \in S^1 \mathfrak{g}^*$$

と表すことにする.

**例 2.2.** (a)  $G$  を Lie 群,  $\mathfrak{g}$  を  $G$  の Lie 代数, そして  $M$  を  $G$  が作用する多様体とする.  $\mathfrak{g}$ -微分空間の典型例は  $M$  上の微分形式からなる空間  $\Omega(M)$  である. ただしその Lie 微分と contraction は  $G$  の作用の infinitesimal generator によるものとする.

(b) 外積代数  $\wedge \mathfrak{g}^*$  は余随伴表現  $L^\wedge$ , contraction  $\iota^\wedge(\xi)$ , そして微分

$$d^\wedge := \frac{1}{2} \sum_a y^a L^\wedge(e_a)$$

を考えることにより  $\mathfrak{g}$ -微分空間になる. □

ここから  $\mathfrak{g}$  を簡約 Lie 代数と仮定する.  $\mathfrak{g}$  の外積代数  $\wedge \mathfrak{g}$  の次数は

$$(\wedge \mathfrak{g})^{-i} := \wedge^i \mathfrak{g}, \quad (\wedge \mathfrak{g})^i := 0 \quad (i \geq 0)$$

と定める.  $\wedge \mathfrak{g}$  と  $\wedge \mathfrak{g}^*$  の間の非退化な pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を用いて, 微分  $\partial : \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \wedge \mathfrak{g}$  を

$$\langle d^\wedge X, Y \rangle = \langle X, \partial Y \rangle, \quad X \in \wedge \mathfrak{g}^*, \quad Y \in \wedge \mathfrak{g}.$$

によって定義する. 同様に contraction  $\iota^* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\wedge \mathfrak{g})$  を

$$\langle \xi \cdot X, Y \rangle = \langle X, \iota^*(\xi)Y \rangle, \quad X \in \wedge \mathfrak{g}^*, \quad Y \in \wedge \mathfrak{g}.$$

で定義する.  $[\cdot, \cdot]_{\wedge \mathfrak{g}}$  を Schouten 括弧とすると, 微分  $\partial$  と  $[\cdot, \cdot]_{\wedge \mathfrak{g}}$  を考えれば ( $\wedge \mathfrak{g}$  ではなく)  $(\wedge \mathfrak{g})[1]$  が DG Lie 代数になることを注意しておく. ここで  $(\wedge \mathfrak{g})[1]$  は  $(\wedge \mathfrak{g})[1]^i := (\wedge \mathfrak{g})^{i+1}$  なる次数付き空間とする.

$(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$  を  $\wedge \mathfrak{g}$  の随伴表現による不変部分空間とする.  $\mathfrak{g}$  は簡約 Lie 代数であるから,  $\wedge \mathfrak{g}$  と  $\wedge \mathfrak{g}^*$  の間の pairing は  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$  と  $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  の間の非退化な pairing に制限される. これより  $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  の積が  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$  の余積  $\Delta$  を導く.  $x \in (\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$  が primitive であるとは

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

を満たすこととする.  $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  においても primitive な元を同様に定義する.  $\mathcal{P}, \mathcal{P}^*$  をそれぞれ  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}, (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  の primitive な元からなる部分空間とすると, よく知られているように,  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$  と  $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  の間の pairing は  $\mathcal{P}$  と  $\mathcal{P}^*$  の間の pairing に制限される. よって  $\mathcal{P}^*$  は  $\mathcal{P}$  の双対空間になるので,  $\{e_j\}$  を  $\mathcal{P}$  の基底,  $\{c^j\}$  をその双対基底とする.

$L^S(\xi)$  は余随伴表現を  $S\mathfrak{g}^*$  の次数 0 の derivation に拡張したもものとして, その不変部分空間を  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  と表す. Chevalley's transgression theorem によって  $c^j$  に対応する  $(S\mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  の元を  $p^j$  と表す (例えば [1] 参照).  $\deg p^j = \deg c^j + 1$  であることを注意しておく.

### 3 Chevalley-Koszul 複体

$\mathfrak{g}$ -微分代数とは次数付き結合代数  $\mathcal{A}$  であり,  $\mathfrak{g}$ -微分空間の構造を持ち  $d, L(\xi)$  そして  $\iota(\xi)$  がその積に関して derivation になるものとする.  $\mathfrak{g}$ -微分  $\mathcal{A}$ -加群とは  $\mathfrak{g}$ -微分空間  $\mathcal{N}$  であり,  $\mathfrak{g}$ -微分空間の準同型写像  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  をもつものとする.

**例 3.1.** Weil 代数  $W\mathfrak{g} := S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$  において, Lie 微分として  $L^W(\xi) := L^S(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes L^\wedge(\xi)$ , contraction として  $1 \otimes \iota^\wedge(\xi)$ , そして微分として

$$d^W := \sum_a (1 \otimes y^a) L^W(e_a) - 1 \otimes d^\wedge + \sum_a v^a \otimes \iota^\wedge(e_a)$$

を定めれば  $\mathfrak{g}$ -微分代数となる. □

任意の  $\mathfrak{g}$ -微分  $W\mathfrak{g}$ -加群  $\mathcal{N}$  に対して, horizontal projection

$$P_{\text{hor}} := \prod_a \iota^{\mathcal{N}}(e_a) y^a : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}_{\text{hor}}$$

が構成できる. 定義から  $P_{\text{hor}}$  は  $S\mathfrak{g}^*$  の作用と  $L^{\mathcal{N}}(\xi)$  と可換である.  $d_{\text{hor}} := P_{\text{hor}} \circ d^{\mathcal{N}}$  とすると,  $d_{\text{hor}}$  は derivative であり, 任意の  $x \in \mathcal{N}_{\text{hor}}$  に対して,  $d_{\text{hor}}x = (d - \sum_a y^a L^{\mathcal{N}}(e_a))x \in \mathcal{N}_{\text{hor}}$  が成り立つことを注意しておく. また  $\mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$  上の次数 0 の自己準同型写像

$$\alpha := \sum_a \iota^{\mathcal{N}}(e_a) \otimes y^a, \quad \beta := \sum_a y^a \otimes \iota^{\wedge}(e_a)$$

を定める.  $\alpha, \beta$  は nilpotent であるから  $e^{\alpha}, e^{\beta}$  は有限和となる.

[1] における Proposition 5.3 にはギャップがあるので, 次のように修正する.

**命題 3.2.**  $\mathcal{N}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群とする.  $\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*$  を

$$1 \otimes d^{\wedge} + d_{\text{hor}} \otimes 1 - \sum_a v^a \otimes \iota^{\wedge}(e_a) - \sum_a (1 \otimes y^a) L(e_a), \quad (1)$$

を微分とする DG 空間と考える. ここで  $L(\xi) := L^{\mathcal{N}}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes L^{\wedge}(\xi)$ . このとき

$$e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} : \mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathcal{N}, \quad x \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta|(|x|+1)} \eta \cdot x$$

は DG 空間の同型写像になる. □

証明. まず

$$\begin{aligned} \text{Ad}(e^{\alpha})(1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi)) &= 1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi) + [\alpha, 1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi)] + \frac{1}{2}[\alpha, [\alpha, 1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi)]] + \dots \\ &= \iota^{\mathcal{N}}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi). \end{aligned}$$

同様に

$$\text{Ad}(e^{-\beta})(\iota^{\mathcal{N}}(\xi) \otimes 1) = \iota^{\mathcal{N}}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi).$$

よって

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\beta}} & \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\alpha}} & \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* \\ \iota^{\mathcal{N}}(\xi) \otimes 1 \downarrow & & \downarrow \iota^{\mathcal{N}}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi) & & \downarrow 1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi) \\ \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\beta}} & \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\alpha}} & \mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* \end{array}$$

が可換であることがわかる.  $\bigcap_{\xi \in \mathfrak{g}} \ker(1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi)) = \mathcal{N} \otimes \mathbb{F} = \mathcal{N}$  に注意すると, 2つの同型写像

$$\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^* \xrightarrow{e^{-\beta}} (\mathcal{N} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{hor}} \xrightarrow{e^{-\alpha}} \mathcal{N}$$

を得る.  $(\mathcal{N} \otimes \mathfrak{g}^*)_{\text{hor}}$  において,  $e^{-\alpha} = \prod_a (1 - \iota^{\mathcal{N}}(e_a) \otimes y^a)$  は

$$1 \otimes \prod_a (1 - y^a \iota^{\wedge}(e_a)) = 1 \otimes \prod_a \iota^{\wedge}(e_a) y^a = 1 \otimes P_{\text{hor}}^{\wedge}$$

と一致する. これから  $e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}(x \otimes \eta) = (-1)^{|\eta|(|x|+1)} \eta \cdot x$  であることがわかる. □

$$K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) := (\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$$

とする.  $d_{\mathfrak{g}}$  を微分 (1) の  $K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  への制限とする. つまり

$$d_{\mathfrak{g}} = 1 \otimes d^{\wedge} + d_{\text{hor}} \otimes 1 - \sum_a v^a \otimes \iota^{\wedge}(e_a).$$

$K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  は微分を  $d_{\mathfrak{g}}$ ,  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群構造を  $(-1)^{|c|}(1 \otimes \iota^{\wedge}(c))$  とする DG  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群と考える. ここで  $\iota^{\mathcal{M}} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{M})$  を代数の準同型写像  $\iota^{\mathcal{M}} : \wedge \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathcal{M})$  に拡張しておく. 一方  $\mathcal{N}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群とすれば,  $\mathcal{N}_{\text{inv}}$  は DG  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群になる. ただし  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群構造は  $\iota^{\mathcal{N}}(c)$  とする.  $\alpha, \beta$  は  $L(\xi)$  と可換であるから,  $e^{\alpha}, e^{\beta}$  も  $L(\xi)$  と可換である. よって  $e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}$  の  $K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  への制限が DG  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群の同型写像であることがわかる. つまり  $e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}$  の制限も同じ記号で書くと,

$$d^{\mathcal{N}} \circ e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} = e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ d_{\mathfrak{g}} \quad (2)$$

が成り立つ.

**定義 3.3.**  $\mathcal{N}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群とする.  $\mathcal{N}$  の Chevalley-Koszul 複体とは DG  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群

$$\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) := \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}, \quad \tilde{d}_{\mathfrak{g}} := d^{\mathcal{N}} \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota^{\wedge}(c_j),$$

である. ただし  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群構造は  $1 \otimes \iota^{\wedge}(c)$  と定める.  $\square$

$\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  と  $K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  を結び付けるため, Alekseev-Meinrenken [1] に倣って, ある Maurer-Cartan-型方程式を考える.  $(\wedge \mathfrak{g})^{-} := \bigoplus_{i>0} \wedge^i \mathfrak{g}$  とするとき, Alekseev-Meinrenken は次を示した ([1, Theorem 3.6] 参照):

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge \mathfrak{g}} + \sum_a v^a \otimes e_a = \sum_j p^j \otimes c_j \quad (3)$$

は次数 0 の canonical な解  $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^{-})_{\text{inv}}$  が存在する. ここで  $\wedge \mathfrak{g}$  における微分  $\partial$ , Schouten 括弧  $[\cdot, \cdot]_{\wedge \mathfrak{g}}$  を

$$\partial(p \otimes y) := p \otimes \partial y, \quad [p \otimes y, p' \otimes y']_{\wedge \mathfrak{g}} := pp' \otimes [y, y']_{\wedge \mathfrak{g}}.$$

と定義することにより  $(S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^{-})_{\text{inv}}$  上に拡張する. 以下では (3) の解  $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^{-})_{\text{inv}}$  をひとつ固定しておく. また  $f = \sum_i f'_i \otimes f''_i \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge \mathfrak{g})^{-})_{\text{inv}}$  に対して,  $(N_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  上に  $\iota(f)$  を

$$\iota(f)(x \otimes \eta) := \sum_i f'_i x \otimes \iota^{\wedge}(f''_i) \eta.$$

で定義する.  $f$  は nilpotent であるから,  $e^{\iota(f)} : (N_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}} \rightarrow K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  は有限和であることを注意しておく.

$K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) := (N_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  は微分,  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群構造を, それぞれ

$$d'_{\mathfrak{g}} := e^{-\iota(f)} \circ d_{\mathfrak{g}} \circ e^{\iota(f)}, \quad (-1)^{|c|}(1 \otimes \iota^{\wedge}(c)).$$

と定めた DG  $(\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群と考える.

ここで

$$e^{-\iota(f)} \circ (1 \otimes d^\wedge) \circ e^{\iota(f)} = 1 \otimes d^\wedge - \iota(\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge \mathfrak{g}}) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f)L^\wedge(e_a)$$

となる ([1, Lemma 2.2] 参照). (3) の解  $f$  を用いれば

$$e^{-\iota(f)} \circ (1 \otimes d^\wedge) \circ e^{\iota(f)} = 1 \otimes d^\wedge - \iota(\sum_j p^j \otimes c_j - \sum_a v^a \otimes e_a) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f)L^\wedge(e_a).$$

であり,  $K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  の微分が  $d_{\mathfrak{g}} = 1 \otimes d^\wedge + d_{\text{hor}} \otimes 1 - \sum_a v^a \otimes \iota^\wedge(e_a)$ , であったことを思い出せば,

$$\begin{aligned} e^{-\iota(f)} \circ d_{\mathfrak{g}} \circ e^{\iota(f)} &= d_{\mathfrak{g}} - \iota(\sum_j p^j \otimes c_j - \sum_a v^a \otimes e_a) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f)L^\wedge(e_a) \\ &= 1 \otimes d^\wedge + d_{\text{hor}} \otimes 1 - \sum_j p^j \otimes \iota^\wedge(c_j) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f)L^\wedge(e_a) \end{aligned} \quad (4)$$

が成り立つことがわかる.

次の写像

$$\tilde{i}: \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \hookrightarrow K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta|} z \otimes \eta.$$

を定義する.  $x \in \mathcal{N}_{\text{basic}}$  に対しては  $d_{\text{hor}}x = d^{\mathcal{N}}x$  であることに注意すれば

$$d'_{\mathfrak{g}} \circ \tilde{i} = \tilde{i} \circ \tilde{d}_{\mathfrak{g}} \quad (5)$$

がわかる. よって  $\tilde{i}$  はコチェイン写像である. さらに  $\tilde{i}$  は  $\text{DG } (\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群の準同型写像であることがわかる.

定義から  $e^{\iota(f)}: K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$  は  $\text{DG } (\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群の同型写像であるから, 写像  $\Psi$  を次の合成

$$\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\tilde{i}} K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \xrightarrow[e]{e^{\iota(f)}} K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \xrightarrow[\sim]{e^{-\alpha} \circ e^{-\beta}} \mathcal{N}_{\text{inv}},$$

とすれば,  $\Psi$  はコチェイン写像である. 実際, (2) と (5) によって

$$\begin{aligned} \Psi \circ \tilde{d}_{\mathfrak{g}} &= e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ e^{\iota(f)} \circ \tilde{i} \circ \tilde{d}_{\mathfrak{g}} \\ &= e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ e^{\iota(f)} \circ d'_{\mathfrak{g}} \circ \tilde{i} \\ &= e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ d_{\mathfrak{g}} \circ e^{\iota(f)} \circ \tilde{i} \\ &= d^{\mathcal{N}} \circ e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ e^{\iota(f)} \circ \tilde{i} = d^{\mathcal{N}} \circ \Psi. \end{aligned}$$

明らかに  $\Psi$  は  $\text{DG } (\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群の準同型写像である.  $\Psi$  は  $z \otimes \eta$  を  $(-1)^{|\eta||z|}(e^{\iota(f)}\eta) \cdot z$  にうつすので,  $\Psi$  は [1] で定義されたものと似ている. しかし, とともに3つの写像の合成なのだがそのうちの2つが異なるため, これら2つは異なることを注意しておく.

さらに次を得るが, この証明は [1] の Theorem 4.2 の証明と平行である.

**定理 3.4.**  $\mathfrak{g}$  を簡約 Lie 代数,  $\mathcal{N}$  を  $\mathfrak{g}$ -微分  $W_{\mathfrak{g}}$ -加群とする. このとき

$$\Psi: \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}, \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta||z|}(e^{\iota(f)}\eta) \cdot z$$

は  $\text{DG } (\wedge \mathfrak{g})_{\text{inv}}$ -加群としてホモトピー同値写像である.  $\square$

証明.  $e^{\iota(f)} : K'_g(\mathcal{N}) \rightarrow K_g(\mathcal{N})$  と  $e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} : K_g(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{N}_{\text{inv}}$  は同型写像であるから,  $\tilde{i} : \tilde{K}_g(\mathcal{N}) \rightarrow K'_g(\mathcal{N})$  がホモトピー同値写像であることを示せばよい. つまり  $\tilde{i}$  の homotopy inverse  $K'_g(\mathcal{N}) \rightarrow \tilde{K}_g(\mathcal{N})$  を構成すればよい.

$\mathfrak{g}$  は簡約 Lie 代数であるから,  $\mathfrak{g}$  上に不変な内積  $B$  を定める.  $B$  によって定まる同型写像を  $B^\sharp : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$  として,  $\wedge \mathfrak{g}^*$  の Casimir 作用素  $\text{Cas}_g^\wedge$  を  $\text{Cas}_g^\wedge := \sum_a L^\wedge(B^\sharp(e^a)) \circ L^\wedge(e_a)$ . と定義する. よく知られているように  $\wedge \mathfrak{g}^* = \ker(\text{Cas}_g^\wedge) \oplus \text{im}(\text{Cas}_g^\wedge)$ ,  $\ker(\text{Cas}_g^\wedge) = (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  である. さらに  $\mathcal{L}_0$  を  $1 \otimes \text{Cas}_g^\wedge \in \text{End}(\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes \wedge \mathfrak{g}^*)$  の  $K'_g(\mathcal{N})$  への制限とすると  $K'_g(\mathcal{N}) = \ker(\mathcal{L}_0) \oplus \text{im}(\mathcal{L}_0)$ ,  $\ker(\mathcal{L}_0) = \tilde{K}_g(\mathcal{N}) = \mathcal{N}_{\text{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\text{inv}}$  である.  $\Pi_0$  を  $\text{im}(\mathcal{L}_0)$  に沿った  $K'_g(\mathcal{N})$  から  $\tilde{K}_g(\mathcal{N})$  への射影,  $\mathcal{G}_0$  を  $\mathcal{L}_0$  に関する Green 作用素とする. つまり  $\mathcal{G}_0 \circ \Pi_0 = 0$ ,  $\mathcal{L}_0 \circ \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0 \circ \mathcal{L}_0 = 1 - i \circ \Pi_0$ . ここで  $i : \tilde{K}_g(\mathcal{N}) \hookrightarrow K'_g(\mathcal{N})$  は自然な包含写像とする.

$K'_g(\mathcal{N})$  上で

$$h := \sum_a 1 \otimes \iota^\wedge(B^\sharp(e^a)) \circ L^\wedge(e_a)$$

を考える. そして  $\mathcal{L} := [d'_g, h]$  とおく. 明らかに  $\mathcal{L}$  はコチェイン写像である. さらに  $\ker \mathcal{L} = \ker \mathcal{L}_0$  であることが次のようにわかる:  $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{(j)}$  を  $\wedge^j \mathfrak{g}$  の全ての元の contraction で 0 になる元からなる部分空間とすると, filtration

$$0 = (\wedge \mathfrak{g}^*)_{(0)} \subset (\wedge \mathfrak{g}^*)_{(1)} \subset \cdots \subset (\wedge \mathfrak{g}^*)_{(\dim \mathfrak{g}+1)} = \wedge \mathfrak{g}^*$$

を得る. さらに  $L^\wedge(\xi)((\wedge \mathfrak{g}^*)_{(j)}) \subset (\wedge \mathfrak{g}^*)_{(j)}$  であるから  $K'_g(\mathcal{N})_{(j)} := (\mathcal{N}_{\text{hor}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{(j)})_{\text{inv}}$  は well-defined. よって filtration

$$0 = K'_g(\mathcal{N})_{(0)} \subset K'_g(\mathcal{N})_{(1)} \subset \cdots \subset K'_g(\mathcal{N})_{(\dim \mathfrak{g}+1)} = K'_g(\mathcal{N})$$

を得る. (4) より  $\mathcal{L}$  において  $[1 \otimes d^\wedge, h]$  以外の全ての項は filtration の次数を少なくとも 1 つ下げることがわかる.  $K'_g(\mathcal{N})$  において

$$[1 \otimes d^\wedge, h] = \sum_a 1 \otimes L^\wedge(B^\sharp(e^a))L^\wedge(e_a) = 1 \otimes \text{Cas}_g^\wedge = \mathcal{L}_0,$$

であるから  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + R$  と表すことができる. ただし  $R$  は filtration の次数を下げる.  $h \circ i \circ \Pi_0 = 0$  から  $\mathcal{L} \circ i \circ \Pi_0 = 0$  を得るが, さらに

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L} \circ (1 - i \circ \Pi_0) \\ &= \mathcal{L}_0 \circ (1 - i \circ \Pi_0) + R \circ (1 - i \circ \Pi_0) \\ &= \mathcal{L}_0 + R \circ \mathcal{G}_0 \circ \mathcal{L}_0 \\ &= (1 + R \circ \mathcal{G}_0) \circ \mathcal{L}_0. \end{aligned}$$

が成り立つ.  $R \circ \mathcal{G}_0$  は filtration の次数を下げるので,  $1 + R \circ \mathcal{G}_0$  は可逆. よって  $\ker(\mathcal{L}) = \ker(\mathcal{L}_0) = \tilde{K}_g(\mathcal{N})$ . 以上のことにより  $K'_g(\mathcal{N}) = \ker(\mathcal{L}) \oplus \text{im}(\mathcal{L})$ ,  $\ker(\mathcal{L}) = \tilde{K}_g(\mathcal{N})$  を得る.

$\mathcal{G}$  を  $\mathcal{L}$  に関する Green 作用素, i.e.,  $\mathcal{G} \circ i \circ \Pi = 0$ ,  $\mathcal{G} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{G} = 1 - i \circ \Pi$  とする. ここで  $\Pi$  は  $\text{im}(\mathcal{L})$  に沿った  $K'_g(\mathcal{N})$  から  $\tilde{K}_g(\mathcal{N})$  への射影とする.  $\mathcal{G}$  はコチェイン写像であるから,  $H := h \circ \mathcal{G}$  は  $[d'_g, H] = 1 - i \circ \Pi$  を満たす. よって  $\tilde{\Pi} : K'_g(\mathcal{N}) \rightarrow \tilde{K}_g(\mathcal{N})$  を

$$\tilde{\Pi}(z \otimes \eta) := (-1)^{|\eta|} \Pi(z \otimes \eta)$$

と定義すれば  $1 - \tilde{i} \circ \tilde{\Pi} = 1 - i \circ \Pi = [d'_g, H]$  が成り立つ. ゆえに  $\tilde{\Pi}$  が求める準同型写像である.  $\square$

## 参考文献

- [1] A. Alekseev, E. Meinrenken, *Equivariant cohomology and the Maurer-Cartan equation*, Duke Math. J. 130 (2005), no. 3, 479–521.
- [2] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), no. 1, 25–83.
- [3] B. Keller, *A-infinity algebras, modules and functor categories*, math.RT/0510508.
- [4] K. Lefèvre-Hasegawa, *Sur les  $A_\infty$  catégories*, math.CT/0310337.
- [5] T. Maszczyk, A. Weber, *Koszul duality for modules over Lie algebras*, Duke Math. J. 112 (2002), no. 3, 511–520.
- [6] 山崎啓太, 同変コホモロジーとその Cartan モデル, Proceedings of 34th Symposium on Transformation Groups (2007), 94–102.