1　4月27日の課題から

1.1　課題1

オイラーの公式を用いて三角関数の倍角、半角の公式を導くこと。

解法の例　倍角の場合は、以下の方針で進める。角度をθとおき、2θに対する複素指数関数をオイラーの公式で展開する。それと、θをオイラーの公式で三角関数を用いて表したもの同士の積が等しいとおき、実数部、虚数部を比較する。

$$
\begin{aligned}
e^{j2\theta} &= e^{j\theta}e^{j\theta} \\
\cos 2\theta + j\sin 2\theta &= (\cos\theta + j\sin\theta)(\cos\theta + j\sin\theta) \\
&= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta + j(\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta) \\
&= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2j\sin\theta\cos\theta \\
\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \qquad (1) \\
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \qquad (2)
\end{aligned}
$$

式1と式2が求める公式であった。

半角の公式も同様にθに対する複素指数関数が$\theta/2$に対する複素指数関数の積になることを利用して、両辺の複素指数関数をオイラーの公式で展開する。

$$
\begin{aligned}
e^{j\theta} &= e^{j\frac{\theta}{2}}e^{j\frac{\theta}{2}} \\
\cos\theta + j\sin\theta &= (\cos\frac{\theta}{2} + j\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2} + j\sin\frac{\theta}{2}) \\
&= \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + j(\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}) \\
&= \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} + 2j\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

ここで実数部分に注目して、$|e^{j\theta/2}| = 1$を利用して整理する。

$$
\begin{aligned}
|e^{j\frac{\theta}{2}}| + \cos\theta &= |e^{j\frac{\theta}{2}}| + \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \\
1 + \cos\theta &= \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \\
&= 2\cos^2\frac{\theta}{2} \\
\cos^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \cos\theta}{2} \qquad (3) \\
|e^{j\frac{\theta}{2}}| - \cos\theta &= |e^{j\frac{\theta}{2}}| - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} \\
1 - \cos\theta &= \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} \\
&= 2\sin^2\frac{\theta}{2} \\
\sin^2\frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos\theta}{2} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

式3と式4が求める公式であった。

1.2　課題2

周波数領域の畳込みが時間領域の積になることを確認すること。

解法の例　与えられた式5のフーリエ逆変換を求めて時間領域で表す。

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int X(\lambda)H(\omega-\lambda)d\lambda \qquad (5)\\
y(t) &= \frac{1}{2\pi}\int Y(\omega)e^{j\omega}d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\int X(\lambda)H(\omega-\lambda)d\lambda e^{j\omega}d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\int X(\lambda)H(\omega-\lambda)d\lambda e^{j\lambda+j\omega-j\lambda}d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\int X(\lambda)H(\omega-\lambda)d\lambda e^{j\lambda}e^{j(\omega-\lambda)}d\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int\int X(\lambda)H(u)d\lambda e^{j\lambda}e^{ju}du\\
&= \frac{1}{2\pi}\int X(\lambda)e^{j\lambda}d\lambda\int H(u)e^{ju}du\\
&= 2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\int X(\lambda)e^{j\lambda}d\lambda\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int H(u)e^{ju}du\right)\\
&= 2\pi x(t)h(t) \qquad (6)
\end{aligned}
$$

問題の ω と λ の順が入れ替わっていました。訂正しておいてください。問題のままでは、時間軸を逆転しなければなりません。