離散数学 試験問題と解答

2017.8

1. (a) (1) 自然数全体の集合を N とする。いま、N の部分集合 A, B を $A = \{\, x \mid x \text{ は } 9 \text{ の約数} \}$, $B = \{\, x \mid x^2 - 3x < 0 \,\}$ とするとき、以下の (i) – (iv) を求めよ。

   (i) $A \cup B$　　(ii) $A \cap B$　　(iii) $A - B$　　(iv) 2^B

   (2) 有限集合 C, D について、以下の式の中から正しいものを全て選べ。

   (i) $\{\emptyset\} \in 2^C$　　(ii) $C \cap (C \cup D) = C$　　(iii) $\overline{C \cap D} = \overline{C} \cup \overline{D}$　　(iv) $C - D = C \cup \overline{D}$

   ....

   解答 (a) (1) $A = \{1, 3, 9\}$, $B = \{1, 2\}$ **なので、** $A \cup B = \{1, 2, 3, 9\}$**,** $A \cap B = \{1\}$**,** $A - B = \{3, 9\}$**,** $2^B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$**.**　**(2 × 4 = 8 点)**

   (2) (ii), (iii)　**(1 × 2 =2 点)**

   ....

   (b) 集合 $A = \{\, 1, 2, 3 \,\}$, $B = \{\, 2, 3, 4 \,\}$ とするとき、以下の (1), (2) に答えよ。

   (1) ２項関係 $R\,(\subseteq A \times B)$ を以下のように定める。

   $$\frac{x - y}{3} \text{ が整数のとき } (x, y) \in R$$

   このとき、集合 R に含まれる要素を全て列挙せよ。

   (2) 以下のような集合 A から集合 B への対応 f, g, h がある。

   $$f(1) = 3, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 2$$
   $$g(1) = 3, \quad g(2) = 3, \quad g(3) = 4$$
   $$h(1) = 2, \quad h(1) = 3, \quad h(3) = 4$$

   このうち、定義域を A, 終域を B とする関数は $\boxed{\text{(ア)}}$ で、全射は $\boxed{\text{(イ)}}$ 、単射は $\boxed{\text{(ウ)}}$ である。空欄 (ア)、(イ)、(ウ) にあてはまる対応を f, g, h から選べ。但し、複数の対応が該当する場合はあてはまるものを全て書くこと。

   ....

   解答 (b) (1) $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ **のうち、** $\frac{x-y}{3}$ **が整数になるのは** $R = \{(1, 4), (2, 2), (3, 3)\}$**.**　**(2 点)**

   (2) (ア) f, g　**(イ)** f　**(ウ)** f　**(1 × 4 =4 点)**

   ....

2. 以下の式で定義される数列 $a_1, a_2, \ldots$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \;\; (n \geq 3)$$

このとき、以下の (1), (2) に答えよ。

(1) a_5 を求めよ。

(2) 任意の自然数 $n \geq 1$ について、$a_n < (\frac{7}{4})^n$ であることを数学的帰納法を使って証明せよ。

....

解答　(1) $a_5 = 8$　　**(1 点)**

(2) (i) $a_1 = 1 < \frac{7}{4}$**,** $a_2 = 2 < (\frac{7}{4})^2$ **より、**$n = 1, 2$ **のときは** $a_n < (\frac{7}{4})^n$ **が成立。**

(ii) $n = k,\ k+1\ (k \geq 1)$ **で** $a_n < (\frac{7}{4})^n$ **が成り立つとすると、**

$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k < (\frac{7}{4})^{k+1} + (\frac{7}{4})^k = (\frac{7}{4})^k(\frac{7}{4} + 1) = (\frac{7}{4})^k(\frac{11}{4}) < (\frac{7}{4})^k(\frac{7}{4})^2 = (\frac{7}{4})^{k+2}$**.**

よって、$n = k + 2$ **でも成り立つ。**

(i),(ii) より、任意の自然数 $n \geq 1$ **について、**$a_n < (\frac{7}{4})^n$ **が成り立つ。(証明終)**　　**(5 点)**

. . . .

3. (a) 集合 $A = \{a, b, c\}$ とする。いま、2 つの集合 $X \in 2^A$, $Y \in 2^A$ について、$|\ X\ | = |\ Y\ |$ のとき $X \sim Y$ と書くことにする。このとき、関係 $\sim$ は同値関係で、2^A は同値類 $\{$ (カ) $\}$, $\{$ (キ) $\}$, $\{$ (ク) $\}$, $\{$ (ケ) $\}$ に分割される。 空欄 (カ)〜(ケ) (順不同) を埋めよ。

. . . .

解答　(a) (カ) $\emptyset$ **(キ)** $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ **(ク)** $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$ **（ケ）** $\{a, b, c\}$ **（順不同）**
(2 × 4 =8 点)

. . . .

(b) 集合 $A = \{a, b, c\}$, $B = 2^A - A$ とする。このとき、以下の (1), (2) に答えよ。

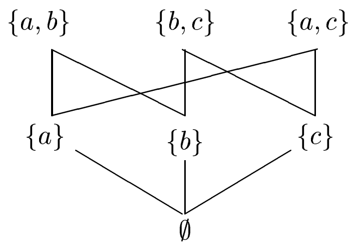
(1) 順序集合 $(B, \subseteq)$ のハッセ図を書き、束をなしているかどうか答えよ。

(2) 順序集合 $(B, \subseteq)$ において、最大元、最小元、極大元、極小元があればそれぞれ答えよ。

. . . .

解答　(b) (1) ハッセ図 (下図)。束でない。　　**(3 点）**

(2) 最大元なし, 最小元 $\emptyset$**, 極大元** $\{a, b\}$**,** $\{b, c\}$**,** $\{a, c\}$**, 極小元** $\emptyset$　　**(1 × 6 =6 点)**



. . . .

4. (a) (1) x, y, z を 2 値のブール変数とする。いま、$x \uparrow y = \bar{x} + y$ とするとき、等式 $x \uparrow (y + z) = (x \cdot \bar{y}) \uparrow z$ が成り立つことを示せ。

(2) ブール関数 $f(x, y, z) = \overline{(xy + z)} \cdot (x + yz)$ をリテラルと論理積の数が出来るだけ少なくなるよう簡単化せよ。

. . . .

解答　(a)(1) $x \uparrow (y + z) = \bar{x} + y + z$**.** $(x \cdot \bar{y}) \uparrow z = \overline{x \cdot \bar{y}} + z = \bar{x} + y + z$**. よって、** $x \uparrow (y + z) = (x \cdot \bar{y}) \uparrow z$　　**(3 点）**

(2) $f(x, y, z) = \overline{(xy + z)} \cdot (x + yz) = (\overline{xy} \cdot \bar{z}) \cdot (x + yz) = \overline{xy} \cdot \bar{z} \cdot x + \overline{xy} \cdot \bar{z} \cdot yz = (\bar{x} + \bar{y}) \cdot \bar{z} \cdot x$
$= x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} = x \cdot \overline{(y + z)} = \overline{\bar{x} + y + z}$　　**(3 点）**

. . . .

(b) 空欄 (サ)、(シ)、(ス) にあてはまる正しい文章を (i) – (iv) から一つずつ選べ。

(1) 1 次方程式 $ax + b = 0$ (a, b は実数) のとき、$a \neq 0$ は $ax + b = 0$ が実数解 x を持つための (サ) 。

(2) 2次方程式 $x^2+b=0$ (b は有理数) のとき、$b \leq 0$ は $x^2+b=0$ が有理数解 x を持つための (シ) 。

(3) 指数方程式 $2^x+c=0$ (c は実数) のとき、$c<0$ は $2^x+c=0$ が実数解 x を持つための (ス) 。

(i) 必要条件であるが十分条件でない	(ii) 十分条件であるが必要条件でない
(iii) 必要十分条件である	(iv) 必要条件でも十分条件でもない

…………………………………………………………………………

解答 (b) (1) $(a \neq 0) \to$ **「**$ax+b=0$ **は実数解を持つ」. (サ) (ii),**

(2) 「$x^2+b=0$ **が有理数を持つ」**$\to (b \leq 0)$**. (シ) (i),**

(3) 「$2^x+c=0$ **が実数解を持つ」**$\leftrightarrow (c<0)$**. (ス) (iii)　　(2 × 3=6 点)**

…………………………………………………………………………

5. (a) (1) 以下の論理式 (i) – (iii) の真理値表を書き、そのうち恒真式があれば答えよ。

(i) $(\neg p \vee q) \to (p \wedge \neg q)$　　(ii) $(p \wedge q) \vee (p \to \neg q)$　　(iii) $\neg p \leftrightarrow (q \to \neg r)$

(2) 3つの命題論理式 (i) $F \wedge G$, (ii) $G \to \neg H$, (iii) $\neg H \to (\neg F \vee K)$ が真のとき、論理的推論によって K が証明されることを示せ。

…………………………………………………………………………

解答 (a)(1)(i) $(\neg p \vee q) \to (p \wedge \neg q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee (p \wedge \neg q) \equiv p \wedge \neg q$

(ii) $(p \wedge q) \vee (p \to \neg q) \equiv (p \wedge q) \vee \neg p \vee \neg q \equiv 1$　　**(2 × 3=6 点)**

p	q	$(\neg p \vee q) \to (p \wedge \neg q)$	$(p \wedge q) \vee (p \to \neg q)$
0	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**

p	q	r	$\neg p \leftrightarrow (q \to \neg r)$
0	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**
0	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**

恒真式は (ii)　　(1 点)

(2) $F \wedge G$ **から連言除去により** F **と** G **が得られる。次に** G **と** $G \to \neg H$ **より、肯定式を使って** $\neg H$ **が導かれる。また** $\neg H$ **と** $\neg H \to (\neg F \vee K)$ **より、肯定式を使って** $\neg F \vee K$ **が導かれる。最後に** F **と** $\neg F \vee K$ **より、選言三段論法により** K **が得られる。　　(3 点)**

…………………………………………………………………………

(b) 「x が人間である」ことを $H(x)$、「x がロボットである」ことを $R(x)$, 「x は言葉を話す」ことを $S(x)$ で表す。このとき、以下の (1) – (3) に答えよ。

(1) 「人間は皆、言葉を話す」を述語論理式で表現すると (タ) になり、
「あるロボットは言葉を話す」を述語論理式で表現すると (チ) になる。
上の空欄 (タ)、(チ) に入る論理式と同じ意味の式を以下から選べ。

(i) $\forall x\ (H(x) \to S(x))$	(ii) $\forall x\ (H(x) \wedge S(x))$
(iii) $\exists x\ (R(x) \to S(x))$	(iv) $\exists x\ (R(x) \wedge S(x))$

(2) 論理式 (タ) を否定すると $\boxed{\text{(ツ)}\qquad}$ になり、論理式 (チ) を否定すると $\boxed{\text{(テ)}\qquad}$ になる。上の空欄 (ツ)、(テ) に入る論理式と同じ意味の式を以下から選べ。

$$\left(\begin{array}{llll} \text{(i)} & \forall x\ (H(x) \to \neg S(x)) & \text{(ii)} & \exists x\ (H(x) \wedge \neg S(x)) \\ \text{(iii)} & \forall x\ (R(x) \to \neg S(x)) & \text{(iv)} & \exists x\ (R(x) \wedge \neg S(x)) \end{array}\right)$$

(3) 変数 x の定義域を $D = \{$ 太郎, 花子, ペッパー $\}$ としたとき、論理式（チ）を充足する解釈を以下から全て選び、その理由を書け。

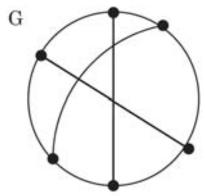
$I_1 = \{\, H(\text{太郎}),\ H(\text{花子}),\ R(\text{ペッパー}),\ S(\text{太郎}),\ S(\text{花子})\, \}$,
$I_2 = \{\, H(\text{太郎}),\ H(\text{花子}),\ S(\text{太郎}),\ S(\text{花子}),\ S(\text{ペッパー})\, \}$,
$I_3 = \{\, H(\text{太郎}),\ H(\text{花子}),\ R(\text{ペッパー}),\ S(\text{太郎}),\ S(\text{ペッパー})\, \}$,
$I_4 = \{\, H(\text{太郎}),\ R(\text{花子}),\ R(\text{ペッパー}),\ S(\text{太郎}),\ S(\text{花子})\, \}$.

. . . .

解答　(b) (1) (タ) (i)　(チ) (iv).　(1 × 2=2 点).　(2) (ツ) (ii)　(テ) (iii),　(1 × 2=2 点).
(3) I_3, I_4 (言葉を話すロボットが存在する)　(1 × 2=2 点)

. . . .

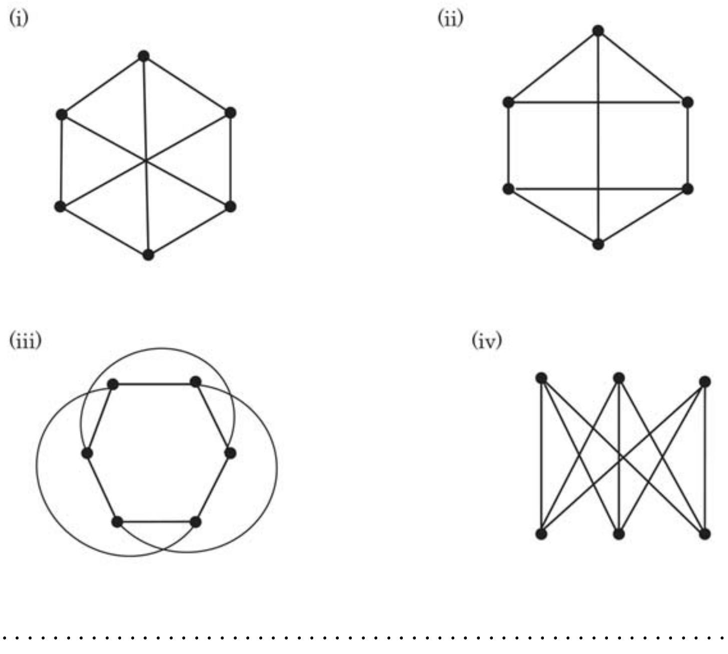
6.　(a) 下図のグラフ G について、以下の (1),(2) に答えよ。



(1) 以下の文 (i) – (iv) のうち正しいものを全て選べ。

(i) G は連結グラフである。　(ii) G は完全グラフである。
(iii) G は正則グラフである。　(iv) G は平面グラフである。

(2) G と同型なグラフを以下の (i) – (iv) から全て選べ。

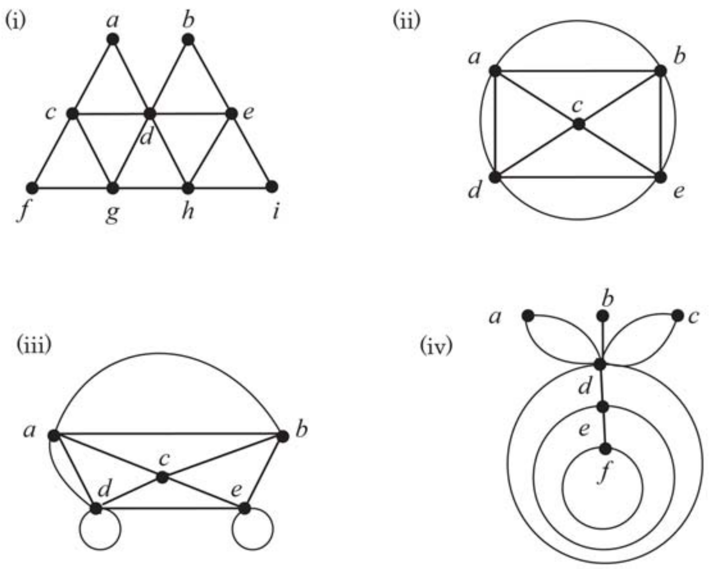


. . . .

解答　(a) (1) (i), (iii)　(1 × 2=2 点).　(2) (i), (iii), (iv)　(2 × 3=6 点).

…………………………………………………………………………………

(b) (1) 以下のグラフ (i) – (iv) のうち、周遊可能なグラフ (全ての辺を一回だけ通る小路が存在するグラフ) を全て選べ。



(2) (1) のうち、オイラーグラフ (閉じた周遊可能小路を持つもの) を全て選び、オイラー閉路を $a \to b \to c \to \cdots \to a$ のように書け。

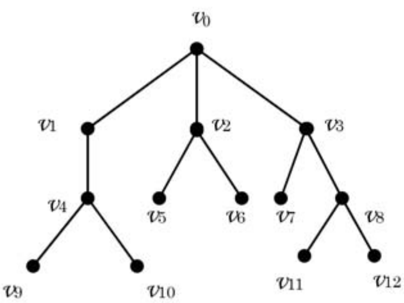
…………………………………………………………………………………

解答　(b) (1) 周遊可能グラフ (i), (iii), (iv)　(1 × 3=3 点).　(2) オイラーグラフ (i)

$a \to d \to b \to e \to d \to h \to e \to i \to h \to g \to f \to c \to g \to d \to d \to a$　**(2 点)**

…………………………………………………………………………………

7.　(a) 節点 v_0 を根とする以下の木を考える。このとき、以下の (1),(2) に答えよ。



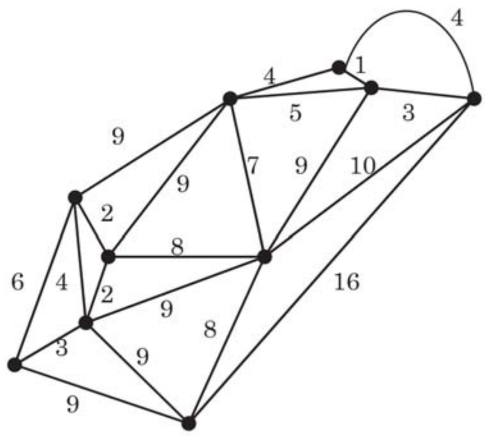
(1) 節点 v_1 の子孫を全て求めよ。
(2) 葉である節点のうち、深さが 3 のものを全て求めよ。

…………………………………………………………………………………

解答　(a)(1) v_4, v_9, v_{10}　(1 × 3=3 点).　(2) $v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}$　(1 × 4=4 点).

…………………………………………………………………………………

(b) 連結グラフの全ての節点を含むような部分グラフで、木になっているものを全域木と呼ぶ。以下の重み付き連結グラフにおける最小全域木（辺の重みの和が最小になるような全域木）を書け。



解答　下図 (3 点)