数学　正解・解答例

$\boxed{1}$ （解答例）

問１　$xe_1 + ye_2 = x'v_1 + y'v_2$ より，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x' + 2y' \\ 2x' + 5y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

が成り立つ。したがって，

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 5 - 2 \cdot 2} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

問２

$$|A| = \begin{vmatrix} 5/6 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} \cdot \frac{-1}{3} = \frac{1}{6}$$

問３　固有方程式は，

$$\begin{vmatrix} 5/6 - t & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 - t \end{vmatrix} = \frac{1}{18}\{(5-6t)(1-3t) - 2\} = \frac{1}{18}(18t^2 - 21t + 3) = \frac{1}{18}(6t-1)(3t-3) = 0$$

であるから，固有値は $t = 1, \frac{1}{6}$ 。

問４　固有値１に対して，

$$\begin{bmatrix} 5/6 - 1 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より，$\frac{1}{3}(-x - 2y) = 0$ であるから，$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ が固有ベクトルである。

また，固有値 $1/6$ に対して，

$$\begin{bmatrix} 5/6 - 1/6 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 - 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より，$\frac{1}{3}(2x - y) = 0$ であるから，$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ が固有ベクトルである。

（採点基準）数学的に正しい解答は解答例と異なる解答過程でも正解とする。

数学　正解・解答例

$\boxed{2}$ （解答例）

問１　$y=e^{ax}$ を $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-6y=0$ に代入して，$(a^2+a-6)e^{ax}=0$。よって $a=-3,2$。

問２

$$\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\log|\cos x|+C,$$

$$\int \tan^{-1}x\,dx=x\tan^{-1}x-\int\frac{x}{x^2+1}\,dx=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C'$$

ただし，C, C' は積分定数。

問３　$f_x=2x+y+1=0, f_y=x+2y+1=0$ とおくと，$x=-\dfrac{1}{3}, y=-\dfrac{1}{3}, f(x,y)=-\dfrac{1}{3}$ である．これが唯一の極値の候補である．このとき，$f_{xx}=2>0, f_{yy}=2, f_{xy}=f_{yx}=1$ である。$(f_{xy})^2-f_{xx}f_{yy}=-3<0$ であるから, 極小である。

問４

$$\begin{aligned}\iint_D xy\,dxdy&=\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}xy\,dy\right)dx\\&=\int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}dx\\&=\int_0^1\frac{1}{2}x(1-x^2)\,dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^4\right]_0^1\\&=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

（採点基準）数学的に正しい解答は解答例と異なる解答過程でも正解とする。