数学　正解・解答例

$\boxed{1}$ （解答例）

問１　３次元ベクトルなので，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の両方に垂直なベクトルの向きは $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ になる。したがって，求める単位ベクトルは

$$\pm\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\pm\begin{bmatrix}-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

問２　この２次曲線は，定数 a，b を用いて $\begin{bmatrix}x-a, y-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-a\\y-b\end{bmatrix}$ と変形できる。対称行列 $\begin{bmatrix}5&1\\1&5\end{bmatrix}$ の固有値は 4 と 6 であり，ともに正なのでこの曲線は楕円である。

問３　固有方程式 $\begin{vmatrix}1-t&0&-1\\0&1-t&-1\\-1&-1&-t\end{vmatrix}=0$ を解く。左辺を計算すると，$(t-2)(t-1)(t+1)=0$ となり，固有値は $t=2,1,-1$ である。

$t=2$ のとき，$\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&-1&-1\\-1&-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0$ より，固有ベクトルの１つは $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ にとれる。

$t=1$ のとき，$\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0$ より，固有ベクトルの１つは $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ にとれる。

$t=-1$ のとき，$\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&2&-1\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0$ より，固有ベクトルの１つは $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ にとれる。

（採点基準）数学的に正しい解答は解答例と異なる解答過程でも正解とする。

数学　正解・解答例

$\boxed{2}$ （解答例）

問１　$t = 4 - x^2$ と置換して，答えは $2 - \sqrt{3}$ である。

問２　$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{x+2y}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{x+2y}, \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}, \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

であるから $t = 1$ のとき，

$x = \sqrt{2},\ y = 2,\ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{4+\sqrt{2}},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2}{4+\sqrt{2}},\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3+\sqrt{2}}{14}$ である。

問３　$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ を解くと，$(x,y) = (0,0), (1,2), (-1,-2)$ となる。

$D(x,y) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ とすると，

$D(0,0) = 8 > 0, D(1,2) = D(-1,-2) = -16 < 0$ である。したがって，$f(x,y)$ は，

$(x,y) = (0,0)$ のとき極値をとらず，

$(x,y) = (1,2)$ で極小値 -1 をとり，$(x,y) = (-1,-2)$ で極小値 -1 をとる。

問４　$y^2 \leqq x - x^2 = x(1-x)$ であり，右辺が０以上になるのは，$0 \leqq x \leqq 1$ のときである。したがって，D は，$0 \leqq x \leqq 1, -\sqrt{x-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{x-x^2}$ の範囲である。これより，求める積分値を I とすると，

$$I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{x}\ dy \right)\ dx$$

と累次積分で表せる。これを計算すると $I = \dfrac{8}{15}$ となる。

（採点基準）数学的に正しい解答は解答例と異なる解答過程でも正解とする。